I. PROSKURIAKOV

PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}$$

EDITORIAL MIR MOSCÚ

PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL

И. В. ПРОСКУРЯКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

I. PROSKURIAKOV

PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL



EDITORIAL MIR MOSCU

Traducido del ruso por Consuelo Fernández Alvarez,
licenciada en Ciencias Físicas

Impreso en la URSS

На испанском языке

INDICE

PREFACIO

Al componer el presente manual el autor hizo todo lo posible, primero, por dar una cantidad suficiente de ejercicios para adquirir los hábitos necesarios para resolver los problemas tipo (por ejemplo, el cálculo de los determinantes con elementos numéricos, solución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes numéricos, etc.), segundo, dar problemas que contribuyan a aclarar los conceptos principales y su relación mutua (por ejemplo, la relación entre las propiedades de las matrices y las propiedades de las formas cuadráticas, por una parte, y las transformaciones lineales, por la otra), tercero, dar problemas que completen las conferencias y contribuyan a la ampliación del horizonte matemático (por ejemplo, las propiedades del agregado de Pfaff de un determinante antisimétrico, las propiedades de las matrices asociadas, etc.).

En algunos problemas se propone demostrar teoremas que pueden hallarse en los manuales. Dando estos problemas, el autor partía de que el profesor, al disponer de poco tiempo en las conferencias, podía ofrecerles a los estudiantes estudiar ellos mismos una parte del material y esto puede efectuarse mediante este compendio de problemas, en el que se dan indicaciones que ayudan a realizar las demostraciones de modo autodidáctico, lo que contribuye al desarrollo de los hábitos iniciales de la investigación científica.

El contenido y el orden de exposición del material en las conferencias dependen en lo fundamental del lector. El autor del libro se esmeró por presentar los problemas, teniendo en cuenta esta variedad de exposición. De aquí proviene cierto paralelismo y la repetición del material. Así, los mismos hechos se dan primero en la parte de las formas cuadráticas, y luego en la parte de las transformaciones lineales, algunos problemas se enuncian de manera que se puedan resolver tanto en un espacio euclídeo real, como también en uno unitario complejo. Nos parece que esto está bien para un compendio ya que ofrece mayor flexibilidad al utilizarlo.

Al principio de algunos párrafos se dan introducciones. Éstas contienen sólo breves indicaciones de la terminología y designacio-

nes en los casos cuando en los manuales no hay una total unificación con respecto a ello. La introducción al § 5 es excepción de lo dicho, en éste se dan los métodos fundamentales de cálculo de los determinantes de cualquier orden y se citan ejemplos para cada método. El autor consideró esto muy útil ya que los manuales carecen de estas indicaciones y los estudiantes chocan en estos casos con bastantes dificultades.

Los números de los problemas, en cuyas respuestas hay soluciones o indicaciones, tienen asterisco. Las soluciones se dan para una pequeña cantidad de problemas: los que contienen un método general que se aplica luego a otros problemas (por ejemplo, el problema 1151 que da el método de cálculo de la función con respecto a la matriz y el problema 1529 que contiene la construcción de la base, en la cual la matriz de la transformación lineal tiene la forma de Jordan) o los problemas de dificultad elevada (por ejemplo, 1433, 1614, 1617). Las indicaciones contienen, por regla general, sólo la idea o el método de solución, dejándole al estudiante resolver el problema por sí mismo. Sólo los problemas más difíciles tienen un breve plan de solución.

I. Proskuriakov.

DETERMINANTES

§ 1. Determinantes de segundo y tercer orden

Calcular los determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi & 2\operatorname{sen}^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \dfrac{2t}{1-t^2} & \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

Calcular los determinantes en los cuales $i=\sqrt{-1}$:

18. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

Resolver los sistemas de ecuaciones, empleando los determinantes:

22. $2x+5y=1,$
$3x+7y=2.$

23. $2x-3y=4,$
$4x-5y=10.$

24. $5x-7y=1,$
$x-2y=0.$

25. $4x+7y+13=0,$
$5x+8y+14=0.$

26. $x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta,$
$x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta.$

27. $x\operatorname{tg}\alpha+y=\operatorname{sen}(\alpha+\beta),$
$x-y\operatorname{tg}\alpha=\cos(\alpha+\beta),$

donde $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k es un número entero).

Investigar si el sistema de ecuaciones es determinado (tiene una solución única), indeterminado (tiene una cantidad infinita de soluciones) o contradictorio (no tiene solución):

28. $4x + 6y = 2,$ $6x + 9y = 3.$ ¿Darán las fórmulas de Cramer en este caso una respuesta correcta?

29. $3x - 2y = 2,$ $6x - 4y = 3.$

30. $(a - b)\,x = b - c.$

31. $x \operatorname{sen} \alpha = 1 + \operatorname{sen} \alpha.$

32. $x \operatorname{sen} \alpha = 1 + \cos \alpha.$

33. $x \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta.$

34. $a^2x = ab,$ $abx = b^2.$

35. $ax + by = ad,$ $bx + cy = bd.$

36. $ax + 4y = 2,$ $9x + ay = 3.$

37. $ax - 9y = 6,$ $10x - by = 10.$

38. Demostrar que para que el determinante de segundo orden sea igual a cero es necesario y suficiente que sus filas sean proporcionales. Lo mismo es justo también para las columnas (si algunos elementos del determinante son iguales a cero, la proporcionalidad puede comprenderse en sentido de que los elementos de una fila se obtienen de los correspondientes elementos de la otra fila, multiplicados por un mismo número, que también puede ser igual a cero).

39*. Demostrar que siendo a, b y c números reales, las raíces de la ecuación $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ serán reales.

40*. Demostrar que el trinomio de segundo grado $ax^2 + 2bx + c$ con coeficientes complejos será un cuadrado perfecto, cuando y sólo cuando

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0.$$

41. Demostrar que, siendo a, b, c y d reales, las raíces de la ecuación $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0$ serán reales.

42*. Mostrar que el valor de la fracción $\frac{ax+b}{cx+d}$, en la cual por lo menos uno de los números c, d difiere de cero, no depende del valor de x cuando y sólo cuando $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$

Calcular los determinantes de tercer orden:

43. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

44. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

45. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}.$

46. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$

47. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$

48. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

49. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **50.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **51.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. **52.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

53. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$. **54.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$. **55.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **56.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

57. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. **58.** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$. **59.** $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$.

60. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$. **61.** $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

62. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\beta & \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ 0 & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **63.** $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 1 \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

64. Para qué condición es válida la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

65. Mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} a^2 & b\operatorname{sen}\alpha & c\operatorname{sen}\alpha \\ b\operatorname{sen}\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

y otros dos determinantes obtenidos del dicho mediante la permutación cíclica de los elementos a, b, c y α, β, γ, son nulos si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y α, β, γ, sus ángulos, opuestos a los lados a, b, c, respectivamente.

Calcular los determinantes de tercer orden en los cuales $i = \sqrt{-1}$:

66. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$. **67.** $\begin{vmatrix} x & a+bi & c+di \\ a-bi & y & e+fi \\ c-di & e-fi & z \end{vmatrix}$.

68. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, donde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

69. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, donde $\varepsilon = \cos\frac{2}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi$

70. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, donde $\varepsilon = \cos\frac{4}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi$.

71. Demostrar que si todos los elementos del determinante de tercer orden son iguales a ± 1, el propio determinante será un número par.

72*. Hallar el valor máximo que puede tomar el determinante de tercer orden a condición de que todos sus elementos sean iguales a ± 1.

73*. Hallar el valor máximo del determinante de tercer orden a condición de que todos sus elementos sean iguales a $+1$ ó 0.

Resolver los sistemas de ecuaciones, empleando los determinantes:

74. $2x + 3y + 5z = 10,$
$3x + 7y + 4z = 3,$
$x + 2y + 2z = 3.$

75. $5x - 6y + 4z = 3,$
$3x - 3y + 2z = 2,$
$4x - 5y + 2z = 1.$

76. $4x - 3y + 2z + 4 = 0,$
$6x - 2y + 3z + 1 = 0,$
$5x - 3y + 2z + 3 = 0.$

77. $5x + 2y + 3z + 2 = 0,$
$2x - 2y + 5z = 0,$
$3x + 4y + 2z + 10 = 0.$

78*. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2 = 0,$
$-\frac{2y}{b} + \frac{3z}{c} - 1 = 0,$
$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$

79. $2ax - 3by + cz = 0,$
$3ax - 6by + 5cz = 2abc,$
$5ax - 4by + 2cz = 3abc,$ donde $abc \neq 0$.

80*. $4bcx + acy - 2abz = 0,$
$5bcx + 3acy - 4abz + abc = 0,$
$3bcx + 2acy - abz - 4abc = 0,$ donde $abc \neq 0$.

81*. Resolver el sistema de ecuaciones:

$x + y + z = a,$
$x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = b,$
$x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = c.$

(ε es un valor de $\sqrt[3]{1}$ diferente de la unidad).

Investigar si el sistema de ecuaciones es determinado, indeterminado o contradictorio:

82. $2x - 3y + z = 2,$
$3x - 5y + 5z = 3,$
$5x - 8y + 6z = 5.$

83. $4x + 3y + 2z = 1,$
$x + 3y + 5z = 1,$
$3x + 6y + 9z = 2.$

84. $5x - 6y + z = 4,$
$3x - 5y - 2z = 3,$
$2x - y + 3z = 5.$

85. $2x - y + 3z = 4,$
$3x - 2y + 2z = 3,$
$5x - 4y = 2.$

86. $2ax - 23y + 29z = 4,$
$7x + ay + 4z = 7,$
$5x + 2y + az = 5.$

87. $ax - 3y + 5z = 4,$
$x - ay + 3z = 2,$
$9x - 7y + 8az = 0.$

88. $ax + 4y + z = 0,$
$2y + 3z - 1 = 0,$
$3x - bz + 2 = 0.$

89. $ax + 2z = 2,$
$5x + 2y = 1,$
$x - 2y + bz = 3.$

Por medio del cálculo directo, según la regla de los triángulos o según la regla de Sarrus, demostrar las siguientes propiedades de los determinantes de tercer orden:

90. Si en el determinante de tercer orden las filas y las columnas cambian de papel (o como suele decirse, se transpone su matriz), el determinante no variará.

91. Si todos los elementos de cualquier fila (o columna) son nulos, el propio determinante también es igual a cero.

92. Si todos los elementos de cualquier fila (o columna) del determinante se multiplican por un mismo número, todo el determinante también se multiplicará por ese mismo número.

93. Si se permutan dos filas (o dos columnas) del determinante, éste cambiará de signo.

94. Si dos filas (o dos columnas) del determinante son iguales, éste es igual a cero.

95. Si todos los elementos de una fila son proporcionales a los correspondientes elementos de otra fila, el determinante es nulo (lo mismo es justo también para las columnas).

96. Si cada elemento de cierta fila del determinante está representado en forma de una suma de dos sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes, en este caso todas las filas, menos la indicada, quedarán las mismas, y en la fila dicha del primer determinante se encontrarán los primeros sumandos, y en la del segundo, los segundos (lo mismo es cierto para las columnas).

97. Si a los elementos de una fila del determinante se les añaden los correspondientes elementos de otra fila, multiplicados por un mismo número, el determinante no cambia (lo mismo es válido para las columnas).

98. Se dice que una fila del determinante es una *combinación lineal* de las demás filas, si cada elemento de dicha fila es igual a la suma de los productos de los correspondientes elementos de las demás filas multiplicados por ciertos números, constantes para cada fila, es decir, que no dependen del número del elemento en la fila. De modo análogo se determina la combinación lineal de las columnas. Por ejemplo: la tercera fila del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

será una combinación lineal de las primeras dos, si existen dos números c_1 y c_2 tales que $a_{3j} = c_1a_{1j} + c_2a_{2j}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Demostrar que si una fila (columna) del determinante de tercer orden es una combinación lineal de las demás filas (columnas), el determinante será igual a cero.

Observación. Es válida también la afirmación inversa, pero ella se desprende del posterior desarrollo de la teoría de los determinantes.

99*. Usando el problema anterior, demostrar en un ejemplo que para que el determinante de tercer orden sea nulo, a diferencia de los determinantes de segundo orden (véase el problema 38), ya no es necesaria la proporcionalidad de dos filas (o columnas).

Aplicando las propiedades de los determinantes de tercer orden, indicadas en los problemas 91—98, calcular los siguientes determi-

nantes:

100. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \operatorname{sen}^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \operatorname{sen}^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$. **101.** $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \operatorname{sen}^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \operatorname{sen}^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

102. $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$. **103.** $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$.

104. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$. **105.** $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$.

106. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$, donde ε es un valor de $\sqrt[3]{1}$ diferente de la unidad.

107. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \operatorname{sen}(\alpha+\delta) \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \operatorname{sen}(\beta+\delta) \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & \operatorname{sen}(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$. **108.** $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, donde $i=\sqrt{-1}$.

109. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}$ (dar una interpretación geométrica del resultado obtenido).

110*. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, donde α, β y γ son las raíces de la ecuación $x^3+px+q=0$.

Sin desarrollar los determinantes, demostrar las siguientes identidades:

111. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

112. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

113. $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

114. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

115. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

116. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

117. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$.

118. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b).$

119. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$
$(b-a)(c-a)(c-b).$

120*. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

121. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

122. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

§ 2. Permutaciones y sustituciones

Definir la cantidad de inversiones en las permutaciones (si no hay indicaciones determinadas, a título de la disposición inicial se toma siempre la siguiente: 1, 2, 3, . . . en orden creciente):

123. 2, 3, 5, 4, 1. **124.** 6, 3, 1, 2, 5, 4.

125. 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8. **126.** 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2.

127. 1, 3, 5, 7, . . ., $2n-1$, 2, 4, 6, 8, . . ., $2n$.

128. 2, 4, 6, . . ., $2n$, 1, 3, 5, . . ., $2n-1$.

En las siguientes permutaciones definir el número de las inversiones y señalar el criterio común de los números n para los cuales dicha permutación es par y aquéllos, para los que es impar:

129. 1, 4, 7, . . ., $3n-2$, 2, 5, 8, . . ., $3n-1$, 3, 6, 9, . . ., $3n$.

130. 3, 6, 9, . . ., $3n$, 2, 5, 8, . . ., $3n-1$, 1, 4, 7, . . ., $3n-2$.

131. 2, 5, 8, . . ., $3n-1$, 3, 6, 9, . . ., $3n$, 1, 4, 7, . . ., $3n-2$.

132. 2, 5, 8, . . ., $3n-1$, 1, 4, 7, . . ., $3n-2$, 3, 6, 9, . . ., $3n$.

133. 1, 5, . . ., $4n-3$, 2, 6, . . ., $4n-2$, 3, 7, . . ., $4n-1$, 4, 8, . . ., $4n$.

134. 1, 5, . . ., $4n-3$, 3, 7, . . ., $4n-1$, 2, 6, . . ., $4n-2$, 4, 8, . . ., $4n$.

135. $4n$, $4n-4$, . . ., 8, 4, $4n-1$, $4n-5$, . . ., 7, 3, $4n-2$, $4n-6$, . . ., 6, 2, $4n-3$, $4n-7$, . . ., 5, 1.

136. ¿En qué permutación de los números 1, 2, . . ., n la cantidad de inversiones será la máxima y cuál será su valor?

137. ¿Cuántas inversiones formará el número 1 que se encuentra en el lugar k de la permutación?

138. ¿Cuántas inversiones formará el número n que se halla en el lugar k en la permutación de los números 1, 2, 3, . . ., n?

139. ¿Cuál será la suma del número de inversiones y del número de órdenes en cualquier permutación de los números 1, 2, . . ., n?

140. ¿Para qué números n la paridad de la cantidad de inversiones

y del número de órdenes en todas las permutaciones de los números 1, 2, . . ., n es igual y para cuáles será inversa?

141*. Demostrar que la cantidad de inversiones en la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es igual al número de inversiones en la permutación de los índices 1, 2, . . ., n que se obtiene, al sustituir dicha permutación por la disposición inicial.

142*. Mostrar que de una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a otra permutación de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de los mismos elementos puede pasarse mediante no más de $n-1$ transposiciones.

143*. Dar un ejemplo de la permutación de los números 1, 2, 3, ..., n que no se puede reducir a una disposición normal mediante menos de $n-1$ transposiciones y demostrar eso.

144*. Mostrar que de una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a cualquiera otra permutación $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de los mismos elementos se puede pasar aplicando no más de $\frac{n(n-1)}{2}$ transposiciones contiguas (es decir, transposiciones de los elementos adyacentes).

145*. Se da que el número de inversiones en la permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ es igual a k. ¿Cuántas inversiones habrá en la permutación de $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$?

146*. ¿Cuántas inversiones hay en todas las permutaciones de n elementos en total?

147*. Demostrar que de cualquier permutación de los números 1, 2, . . ., n que contiene k inversiones se puede pasar a la disposición inicial aplicando k transposiciones contiguas, pero no se puede hacerlo con un número inferior de tales transposiciones.

148*. Demostrar que para cualquier número entero k $(0 \leqslant k \leqslant C_n^2)$, existe una permutación de números 1, 2, 3, . . ., n, cuyo número de inversiones es igual a k.

149*. Designemos por (n, k) el número de permutaciones de los números 1, 2, . . ., n, cada una de las cuales contiene precisamente k inversiones. Deducir para el número (n, k) la relación recurrente: $(n+1, k) = (n, k) + (n, k-1) + (n, k-2) + \ldots + (n, k-n)$, en la que debe ponerse $(n, j) = 0$ para $j > C_n^2$ y para $j < 0$. Empleando esta relación, componer la tabla de los números (n, k) para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

150*. Mostrar que el número de permutaciones de los números 1, 2, . . ., n, que contienen k inversiones, es igual a la cantidad de permutaciones de los mismos números que contienen $C_n^2 - k$ inversiones.

Desarrollar las siguientes sustituciones en el producto de ciclos independientes y definir su paridad por el decremento (o sea, la diferencia entre el número de elementos realmente desplazables y el número de ciclos). Persiguiendo una mayor comodidad de los cálculos, para los números que permanezcan en su sitio puede introducirse la descomposición en ciclos monomiales.

151. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **152.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

153. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. **154.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

155. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. **156.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

157. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

158. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \ldots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$.

159. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

160. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$.

161. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

162. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & nk-k+1 & nk-k+2 & \ldots & nk \\ k+1 & k+2 & \ldots & 2k & \ldots & 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix}$.

En las siguientes sustituciones pasar de la anotación en ciclos a la anotación en dos filas:

163. (1 5) (2 3 4). **164.** (1 3) (2 5) (4).

165. (7 5 3 1) (2 4 6) (8) (9).

166. $(1\ 2)(3\ 4)\ \ldots\ (2n-1,\ 2n)$.

167. $(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 2n-1,\ 2n)$.

168. $(3\ 2\ 1)(6\ 5\ 4)\ \ldots\ (3n,\ 3n-1,\ 3n-2)$.

Multiplicar las sustituciones:

169. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

170. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

172. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2$. **173.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$.

174. Demostrar que si cierto grado del ciclo es igual a la unidad, el índice del grado se divide por la longitud del ciclo. (Se llama longitud del ciclo el número de sus elementos.)

175. Demostrar que entre todos los grados de la sustitución iguales a la unidad, el índice mínimo es igual al mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos que constituyen el desarrollo de la sustitución.

176*. Hallar A^{100}, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

177. Hallar A^{150}, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

178. Hallar la sustitución X de la igualdad $AXB=C$, donde

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&2&1&6&5&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&7&4&5&6\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&1&3&6&4&7&2\end{pmatrix}.$$

179. Demostrar que la multiplicación de la sustitución por la transposición (o sea, por el ciclo de dos términos) (α, β) a izquierda equivale a la transposición (o sea, al cambio de lugares) de los números α y β en la fila superior de la sustitución, y la multiplicación por la misma transposición a derecha equivale a la transposición de α y β en la fila inferior de la sustitución.

180. Demostrar que si los números α y β entran en un ciclo de la sustitución, entonces, al multiplicar esta sustitución por la transposición (α, β) (a izquierda o a derecha) dicho ciclo se descompone en dos ciclos, pero si los números α y β forman parte de distintos ciclos, entonces durante la multiplicación mencionada estos ciclos se unen.

181*. Empleando los dos problemas anteriores, demostrar que la cantidad de inversiones y el decremento de cualquier sustitución tienen la misma paridad.

182*. La sustitución dada se descompone en el producto de transposiciones, demostrar que el número mínimo de las transposiciones es igual a su decremento.

183*. Demostrar que la cantidad mínima de transposiciones que convierte la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en la permutación $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de los mismos elementos es igual al decremento de la sustitución

$$P=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\ldots&a_n\\b_1&b_2&\ldots&b_n\end{pmatrix}.$$

184*. Hallar todas las sustituciones de los números 1, 2, 3, 4, conmutativos con la sustitución

$$S=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}.$$

185. Hallar todas las sustituciones de los números 1, 2, 3, 4, 5, conmutativos con la sustitución

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}.$$

186*. Para cualesquiera números enteros x y m, donde $m \neq 0$, designemos por $r(x, m)$ el resto (que se considera no negativo) de la división de x entre m. Demostrar que si $m \geqslant 2$ y a es un número entero, además, a y m son números primos entre sí, la correspondencia de $x \to r(ax, m)$, $x = 1, 2, \ldots, m-1$, es la sustitución de los números $1, 2, \ldots, m-1$.

187. Escribir la sustitución de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, para la cual el número x pasa al resto si $5x$ se divide por 9.

§ 3. Definición y propiedades elementales de los determinantes de cualquier orden

Los problemas de este párrafo intentan explicar el concepto de determinante de cualquier orden y sus propiedades elementales, incluyendo la igualdad a cero del determinante, cuyas filas son linealmente dependientes, y el desarrollo del determinante por la fila.

En los siguientes párrafos se dan los problemas para adquirir hábitos del cálculo de los determinantes con elementos numéricos, problemas referentes a los métodos de cálculo de los determinantes de forma especial, al teorema de Laplace, a la multiplicación de los determinantes, etc.

Aclarar cuáles de los productos, citados más abajo, entran en los determinantes de órdenes correspondientes y con qué signos:

188. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$. **189.** $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

190. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$. **191.** $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

192. $a_{12}a_{23}a_{34} \ldots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

193. $a_{12}a_{23} \ldots a_{n-1,n}a_{n1}$.

194. $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$.

195. $a_{11}a_{2,n}a_{3,n-1} \ldots a_{n,2}$.

196. $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64} \ldots a_{3n-2,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,3n-2}$.

197. Elegir los valores de i y k de modo que el producto

$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$

entre en el determinante de sexto orden con el signo menos.

198. Elegir los valores de i y k de modo que el producto

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

entre en el determinante de 7 orden con el signo más.

199. Hallar los términos del determinante de cuarto orden que contienen el elemento a_{32} y entran en el determinante con el signo más.

200. Hallar los términos del determinante

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}, \text{ que contienen } x^4 \text{ y } x^3.$$

201. ¿Con qué signo entra el producto de los elementos de la diagonal principal en el determinante de orden n?

202. ¿Con qué signo entra el producto de los elementos de la diagonal secundaria en el determinante de orden n?

203. Usando sólo la definición, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

en el cual todos los elementos por un lado de la diagonal principal son nulos.

204. Utilizando sólo la definición, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,\,n-2} & a_{3,\,n-1} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{n,\,n-2} & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

en el cual todos los elementos por un lado de la diagonal secundaria son nulos.

205. Usando sólo la definición, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

206. Demostrar que si en el determinante de orden n en la intersección de ciertas k filas y l columnas se encuentran elementos nulos, con la particularidad de que $k + l > n$, el determinante es igual a cero.

207*. Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números distintos.

208. Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

209. Hallar el elemento del determinante de orden n simétrico al elemento a_{ik} con respecto a la diagonal secundaria.

210. Hallar el elemento del determinante de orden n, simétrico al elemento a_{ik} con respecto al «centro» del determinante.

211. Denominaremos par o impar el lugar del elemento a_{ik} del determinante en función de si la suma $i + k$ es par o impar. Hallar la cantidad de elementos del determinante de orden n, situados en los lugares pares o impares.

212. ¿De qué modo cambiará el determinante de orden n si la primera columna se permuta al último lugar y las demás columnas se desplazan a la izquierda, conservando su disposición?

213. ¿Cómo cambiará el determinante de orden n si sus filas se escriben en orden inverso?

214. ¿Cómo cambiará el determinante si cada uno de sus elementos se sustituye por un elemento simétrico al dicho con relación al «centro» del determinante?

215*. ¿Cómo cambiará el determinante si cada uno de sus elementos se sustituye por un elemento simétrico al dicho con relación a la diagonal secundaria?

216*. El determinante se denomina *antisimétrico* si los elementos, simétricos respecto a la diagonal principal, se diferencian por el signo, o sea, $a_{ik} = -a_{ki}$ para cualesquiera índices de i, k.

Demostrar que el determinante antisimétrico de orden impar n es igual a cero.

217*. Demostrar que el determinante, cuyos elementos simétricos respecto a la diagonal principal son números complejos conjugados (por ejemplo, reales), es un número real.

218. ¿Para cuales valores de n todos los determinantes de orden n, cuyos elementos satisfacen las condiciones

$$(\alpha)\ a_{jk} \text{ es un número real para } j > k,$$

$$(\beta)\ a_{kj} = ia_{jk} \text{ para } j \geqslant k \quad (i = \sqrt{-1}),$$

serán reales?

219. ¿Para qué valores de n todos los determinantes de orden n, cuyos elementos satisfacen las condiciones (α) y (β) del problema anterior, serán imaginarios puros?

220. Mostrar que para n impar, todos los determinantes de orden n, cuyos elementos satisfacen las condiciones (α) y (β) del problema 218, tienen la forma $a(1 \pm i)$, donde a es un número real.

221. ¿Cómo cambiará el determinante de orden n si cada uno de sus elementos varía de signo?

222*. ¿Cómo cambiará el determinante si cada uno de sus elementos a_{ik} se multiplica por c^{i-k}, donde $c \neq 0$?

223*. Demostrar que cada término del determinante consta de un número par de elementos, que ocupan el lugar impar; de un número par de elementos que ocupan el lugar par, si el determinante posee el orden par, y de un número impar, si el determinante es de orden impar.

224*. Demostrar que el determinante no cambiará si varía el signo de todos los elementos en los lugares impares; pero si varía el signo de todos los elementos en los lugares pares, el determinante no cambia, siendo del orden par y cambia, siendo del orden impar.

225. Demostrar que el determinante no cambiará si a cada fila, excepto la última, se le añade la fila siguiente.

226. Demostrar que el determinante no cambiará si a cada columna, a partir de la segunda, se le añade la columna anterior.

227. Demostrar que el determinante no cambiará si de cada fila, excepto la última, se restan todas las siguientes filas.

228. Demostrar que el determinante no cambiará si a cada colum-

na, a partir de la segunda, se le añaden todas las columnas precedentes.

229. ¿Cómo cambiará el determinante si de cada fila, excepto la última, se resta la siguiente fila, y de la última fila se resta la fila primera inicial?

230*. ¿Cómo cambiará el determinante si a cada columna, empezando por la segunda, se le añade la columna anterior, sumando al mismo tiempo la primera columna y la última?

231. ¿Cómo cambiará el determinante de orden n si su matriz gira en 90° alrededor del «centro»?

232. ¿A qué equivale el determinante, cuya suma de las filas con números pares es igual a la suma de las filas con números impares?

233. Hallar la suma de todos los determinantes de orden $n \geqslant 2$, cada uno de los cuales en cada fila y cada columna tiene un elemento igual a la unidad y todos los demás nulos. ¿Cuántos determinantes de ese tipo habrá?

234. Hallar la suma de los determinantes de orden $n \geqslant 2$:

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \ldots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \ldots & a_{2\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \ldots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

donde la suma se toma por todos los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, que varían independientemente el uno del otro desde 1 hasta n.

235. Supongamos que todos los elementos del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

son números enteros dígitos. Designemos por N_i el número escrito por las cifras de la i-ésima fila del determinante, conservando su disposición (a_{in} es el número de unidades, $a_{i,n-1}$ es el número de decenas, etc.). Demostrar que el valor del determinante se divide por el máximo común divisor de los números $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

236. Desarrollando por la tercera fila, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

237. Desarrollando por la segunda columna, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

238. $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ **239.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **240.** $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

241. Sea M_{ij} el menor del elemento a_{ij} del determinante D. Mostrar que si D es un determinante simétrico o un determinante antisimétrico de orden impar, $M_{ij} = M_{ji}$; pero si D es un determinante de orden par, $M_{ij} = -M_{ji}$.

242. Sea D un determinante de orden $n > 1$, D' y D'' determinantes obtenidos de D sustituyendo cada elemento a_{ij} por su complemento algebraico A_{ij} para D' y por su menor M_{ij} para D''. Demostrar que $D' = D''$. El determinante D' se denomina recíproco (o adjunto) a D. De cómo expresar D' por medio de D véase el problema 506.

243. Calcular el siguiente determinante sin desarrollarlo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Sin desarrollar los determinantes, demostrar las siguientes identidades:

244*. $$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

245*. $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} =$$
$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

246*. $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{i-1} & a_1^{i+1} & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{i-1} & a_2^{i+1} & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{i-1} & a_n^{i+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix} =$$
$$= \Big(\sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-i}} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_{n-i}} \Big) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

donde la suma se toma por todas las $n - i$-ésima combinaciones de n números 1, 2, 3, ..., n.

Demostrar las identidades empleando las propiedades de los determinantes, incluyendo el desarrollo por una fila o columna:

247*.
$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \operatorname{sen}\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)+\operatorname{sen}(\gamma-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\gamma)\}.$$

248.
$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \operatorname{sen}^2\beta & \operatorname{sen}\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \operatorname{sen}^2\gamma & \operatorname{sen}\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}(\beta-\gamma)\cos\beta\cos\gamma+\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)\cos\gamma\cos\alpha.$$

249.
$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

250.
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)}.$$

251.
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)(x-z)(y-z)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)(a+z)(b+z)(c+z)}.$$

252.
$$\begin{vmatrix} a^2+(1-a^2)\cos\varphi & ab(1-\cos\varphi) & ac(1-\cos\varphi) \\ ba(1-\cos\varphi) & b^2+(1-b^2)\cos\varphi & bc(1-\cos\varphi) \\ ca(1-\cos\varphi) & cb(1-\cos\varphi) & c^2+(1-c^2)\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi, \text{ siendo } a^2+b^2+c^2=1.$$

253*.
$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta & -\operatorname{sen}\varphi\cos\psi-\cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi\operatorname{sen}\psi+\operatorname{sen}\varphi\cos\psi\cos\theta & -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1.$$

254.
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

255. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d.$

256*. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix} =$

$= -4\,[x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 2\,(xy + xz + xu + yz + yu + zu)].$

§ 4. Cálculo de los determinantes con elementos numéricos

Calcular los determinantes:

257. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

258. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

259. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

260. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$

261. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

262. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$

263. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$

264. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$

265. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$

266. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$

267. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$

268. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$

269. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

270. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$

271. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. **272.** $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$.

273. $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$. **274.** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

275. $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$. **276*.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$.

277. $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$. **278.** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

§ 5. Métodos de cálculo de los determinantes de orden n

Introducción. El método de cálculo de los determinantes con elementos numéricos que consiste en anular todos los elementos de cierta fila (columna), excepto una, y en reducir posteriormente el orden, se hace muy voluminoso para los determinantes de un orden dado con elementos literales. En un caso general este camino conduce a la expresión, que se obtiene al calcular el determinante aplicando directamente su definición. Dicho método es aún más incómodo para un determinante con elementos numéricos o literales y un orden n arbitrario.

No existe un método común para calcular semejantes determinantes (si no se toma en consideración la expresión del determinante que se da en su definición). A los determinantes de uno u otro tipo especial se les aplican diversos métodos de cálculo que conducen a expresiones más elementales (o sea, que contienen una cantidad menor de operaciones) que la expresión del determinante según su definición. Examinaremos algunos de esos métodos, los más usados, luego, con fin de asimilarlos mejor, citaremos problemas para cada uno de los citados métodos, y a continuación, problemas, para los cuales el estudiante tendrá que elegir individualmente el método de resolución. Para facilitar la orientación en el material, los problemas relacionados con el teorema de Laplace y la multiplicación de los determinantes, están reunidos en párrafos apartes.

1. Método de reducción a la forma triangular. Este método consiste en transformar el determinante de tal forma que todos los elementos, a un lado de una de las diagonales, sean nulos. El caso de la diagonal secundaria, invirtiendo el orden de las filas (o columnas), se reduce al caso de la diagonal principal. El determinante obtenido es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo 1. Calcular el determinante de orden n:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Sustraemos la primera fila de todas las demás:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}.$$

Ejemplo 2. Calcular el determinante

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Sustraemos la primera fila de todas las demás:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

De la primera columna sacamos $a_1 - x$, de la segunda, $a_2 - x$, . . ., de la n-ésima columna, $a_n - x$:

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Supongamos que $\frac{a_1}{a_1-x}=1+\frac{x}{a_1-x}$ y añadamos todas las columnas a la primera:

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1+\frac{x}{a_1-x}+\dots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

2. Método de separación de los factores lineales. El determinante se considera como un polinomio de una o varias letras que entran en éste. Al transformarlo, se ve que se divide en unos cuantos factores lineales, lo que significa (si esos factores son primos entre sí) que se divide también en su producto.

Al comparar algunos términos del determinante con los términos del producto de los factores lineales, se encuentra el cociente de la división del determinante por ese producto y, de ese modo, se halla la expresión para el determinante.

Ejemplo 3. Calcular el determinante

$$D=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Si a la primera columna se le añaden todas las demás, se ve que el determinante se divide por $x+y+z$; si a la primera columna se le añade la segunda y se restan la tercera y cuarta columnas, aparece el factor $y+z-x$; si a la primera columna se le añade la tercera y se sustraen la segunda y cuarta columnas, surge el factor $x-y+z$; por fin, si a la primera columna se le añade la cuarta y se sustraen la segunda y tercera columnas, sale el factor $x+y-z$. Considerando que x, y, z son incógnitas independientes, hacemos la conclusión de que todos esos cuatro factores son primos entre sí de dos en dos lo que significa que el determinante se divide por su producto $(x+y+z)(y+z-x)\times\times(x-y+z)(x+y-z)$.

Este producto contiene el término z^4 con el coeficiente -1, mientras que el propio determinante tiene el mismo término z^4 con el coeficiente $+1$. Entonces,

$$D=-(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)=$$
$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2.$$

Ejemplo 4. Aplicando el método de separación de los factores lineales, calcular el determinante de Vandermonde de orden n:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Considerando D_n como un polinomio de una incógnita x_n con coeficientes dependientes de $x_1, \dots, x_{n-1}$, vemos que se anula para $x_n=x_1, x_n=x_2, \dots, x_n=x_{n-1}$, y por eso se divide por $x_n-x_1, x_n-x_2, \dots, x_n-x_{n-1}$.

Todos esos factores son primos entre sí (ya que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son independientes desde el punto de vista algebraico). Por consiguiente, D_n se divide por su producto, es decir,

$$D_n = q(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Al descomponer D_n por la última fila, vemos que éste es un polinomio de grado $n-1$ con respecto a x_n, con la particularidad de que el coeficiente de x_n^{n-1} es igual al determinante de Vandermonde D_{n-1} compuesto de incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; como el producto del paréntesis en el segundo miembro de la última igualdad contiene x_n^{n-1} con el coeficiente 1, el polinomio $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no posee el término x_n, y comparando los coeficientes de x_n^{n-1} en ambos miembros de la igualdad, obtenemos $D_{n-1} = q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, de donde $D_n = D_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})$. Aplicando esta igualdad y sustituyendo n por $n-1$, obtenemos

$$D_{n-1} = D_{n-2}(x_{n-1} - x_1)\ldots(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

Ponemos esta expresión para D_{n-1} en la anterior para D_n. Repitiendo dicho razonamiento, separaremos, por fin, el factor $x_2 - x_1$, después de lo que llegaremos al determinante de Vandermonde de primer orden $D_1 = 1$.

De esta manera,

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

3. Método de relaciones recurrentes (recursivas). Este método consiste en que el determinante dado se expresa, transformándolo y descomponiéndolo por una fila o columna, mediante los determinantes de la misma forma pero de un orden más inferior. La igualdad obtenida se denomina relación recurrente.

Después se calculan directamente, por la forma general del determinante, la cantidad de determinantes de órdenes inferiores tantos, cuantos había en el segundo miembro de la relación recurrente. Los determinantes de orden más elevado se calculan sucesivamente de la relación recurrente. Si hay que obtener una expresión para un determinante de cualquier orden n, entonces, calculando varios determinantes de órdenes inferiores a partir de la relación recurrente, se tiende a advertir la forma general de la expresión buscada y luego se demuestra la validez de ésa para cualquier n mediante la relación recurrente y el método de inducción por n.

La expresión general puede obtenerse también de otra manera. Para ello en la relación recurrente que denota el determinante de orden n se pone la expresión del determinante de orden $(n-1)$ de la misma relación recurrente, sustituyendo n por $n-1$, luego se pone la expresión análoga del determinante de orden $(n-2)$, etc., hasta que se aclare la forma de la expresión general buscada del determinante de orden n. Pueden también combinarse ambas vías, utilizando la segunda para encontrar la expresión buscada y demostrando luego mediante la inducción por n la validez de esa expresión. El método de relaciones recurrentes es el más eficaz entre los métodos analizados aquí y se aplica a determinantes más complejos.

Antes de pasar a los ejemplos de cálculo de los determinantes empleando el método de relaciones recurrentes, examinemos un caso particular de éste en el que la relación recurrente ofrece el algoritmo para resolver el problema, excluyendo el elemento de suposición que existe en el caso general. Sea que la relación recurrente tiene el siguiente aspecto

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n > 2, \tag{1}$$

donde p, q son constantes, o sea, magnitudes independientes de n[1]).

---

[1]) Este método se le comunicó al autor K. Ya. Ókunev. Se aplica también a la relación recurrente $D_n = p_1D_{n-1} + \ldots + p_kD_{n-k}$, siendo $p_1, \ldots, p_k$ constantes y k cualquiera, pero a causa de que los razonamientos son muy voluminosos, nos limitaremos sólo a $k = 2$.

Para $q = 0$ D_n se calcula como término de la progresión geométrica: $D_n = p^{n-1}D_1$; aquí D_1 es el determinante de primer orden de la forma dada, es decir, es el elemento del determinante D_n que se encuentra en el ángulo superior izquierdo.

Sea $q \neq 0$ y α, β, raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - px - q = 0$. Entonces $p = \alpha + \beta$, $q = -\alpha\beta$ y la igualdad (1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}), \tag{2}$$

ó

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}). \tag{3}$$

Supongamos primero que $\alpha \neq \beta$.

Partiendo de las igualdades (2) y (3) por la fórmula para el término $(n - 1)$ de la progresión geométrica, hallamos

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2} (D_2 - \beta D_1) \text{ y}$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2} (D_2 - \alpha D_1),$$

de donde

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1} (D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1} (D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta},$$

$$\text{ó } D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n, \text{ donde } C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)},$$

$$C_2 = -\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha - \beta)}. \tag{4}$$

La última expresión para D_n se aprende fácilmente. Se deducía para $n > 2$, pero se verifica directamente para $n = 1$ y $n = 2$. El valor de C_1 y C_2 puede hallarse no de las expresiones citadas (4), sino de las condiciones iniciales $D_1 = C_1\alpha + C_2\beta$, $D_2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2$.

Sea ahora $\alpha = \beta$. Las igualdades (2) y (3) se hacen idénticas

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$

de donde

$$D_n - \alpha D_{n-1} = A\alpha^{n-2}, \tag{5}$$

donde

$$A = D_2 - \alpha D_1.$$

Sustituyendo aquí n por $n - 1$, obtenemos: $D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = A\alpha^{n-3}$, de donde $D_{n-1} = \alpha D_{n-2} + A\alpha^{n-3}$. Poniendo dicha expresión en la igualdad (5), encontramos que: $D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2A\alpha^{n-2}$. Después de repetir ese procedimiento varias veces, obtenemos $D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)A\alpha^{n-2}$ ó $D_n = \alpha^n [(n-1) \times C_1 + C_2]$, donde $C_1 = \frac{A}{\alpha^2}$, $C_2 = \frac{D_1}{\alpha}$ (en este caso $\alpha \neq 0$ ya que $q \neq 0$).

Ejemplo 5. Calcular el determinante del ejemplo 2 por el método de relaciones recurrentes.

Al representar el elemento del ángulo inferior derecho en forma de $a_n = x + (a_n - x)$, podemos dividir el determinante D_n en la suma de dos determinantes:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & 0 \\ x & a_2 & \dots & x & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \dots & x & a_n - x \end{vmatrix}$$

En el primer determinante la última columna la sustraemos de las demás, mientras que el segundo determinante lo descomponemos por la última columna:

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_{n-1} - x) + (a_n - x) D_{n-1}.$$

Esta es precisamente la relación recurrente. Introduciendo en ella la expresión análoga para D_{n-1}, hallaremos

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_{n-1} - x) + x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots$$
$$\dots (a_{n-2} - x)(a_n - x) + D_{n-2}(a_{n-1} - x)(a_n - x).$$

Al repetir el mismo razonamiento $(n - 1)$ veces y observando que $D_1 = a_1 = x + (a_1 - x)$, obtenemos

$$D_n = x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_{n-1}-x) + x(a_1-x)\dots$$
$$\dots(a_{n-2}-x)(a_n-x) + \dots + x(a_2-x)\dots(a_n-x) + (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x) =$$
$$= x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1-x} + \dots + \frac{1}{a_n-x}\right),$$

lo que coincide con el resultado del ejemplo 2.

Ejemplo 6. Calcular el determinante de orden n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Descomponiendo por la primera fila, hallemos la relación recurrente

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}.$$

La ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene raíces $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

Aplicando la fórmula (4), $D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

4. Método de representación del determinate en forma de suma de determinantes. Algunos determinantes se calculan fácilmente, descomponiéndolos en suma de determinantes del mismo orden respecto a las filas (o a las columnas).

Ejemplo 7. Calcular el determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Este determinante se descompone con respecto a la primera fila en dos, cada uno de los cuales se descompone, de nuevo, con relación a la segunda fila, en dos determinantes, etc. Al llegar a la última fila, obtenemos 2^n determinantes.

Si en cada descomposición tomamos como primeros sumandos los números a_i y como segundos, los números b_j, las filas de los determinantes obtenidos serán bien de tipo $a_i, a_i, \dots, a_i$, o bien de tipo $b_1, b_2, \dots, b_n$. Dos filas del primer tipo son proporcionales y las del segundo tipo, iguales. Para $n > 2$ cada determinante obtenido adquiere por lo menos dos filas de un mismo tipo y se anula. Así, pues, $D_n = 0$ para $n > 2$.

Prosiguiendo,

$$D_1 = a_1 + b_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1).$$

5. Método de variación de los elementos de un determinante. Este método se aplica cuando al cambiar todos los elementos del determinante por un mismo número, se reduce a una forma, para la cual se calculan fácilmente los cofactores* de todos los elementos. El método se basa en la siguiente propiedad: si a todos los elementos del determinante D se les añade un mismo número x, el determinante aumentará en el producto del número x por la suma de los cofactores de todos los elementos del determinante D. En efecto, sean

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Descompongamos D' en dos determinantes con respecto a la primera fila, cada uno de ellos en dos determinantes con respecto a la segunda fila, etc.

Los sumandos que contienen más de una fila de elementos, iguales a x, son iguales a cero.

Los sumandos con una fila de elementos iguales a x, los descomponemos por esa fila. Entonces obtenemos: $D' = D + x \sum_{i, j=1} A_{ij}$, lo que se requería.

Así, pues, el cálculo del determinante D' se reduce a la deducción del determinante D y de la suma de sus complementos algebraicos.

Ejemplo 8. Calcular el determinante D_n del ejemplo 2.

Después de restar el número x de todos sus elementos, recibiremos el determinante

$$D=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 \\ 0 & a_2-x & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Los cofactores de los elementos D, no yacentes en la diagonal principal, son nulos, y de cada elemento en la diagonal principal son iguales al producto de los demás elementos de la diagonal principal. Por eso

$$D_n = (a_1-x)\dots(a_n-x) + x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x) =$$

$$= x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

Calcular los siguientes determinantes, reduciéndolos a la forma triangular[1]):

279. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$ **280.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$

---

* También se llama adjunto y complemento algebraico. *N. del Tr.*)

[1]) Siempre que por el aspecto del determinante es imposible saber su orden, se supone que éste es igual a n.

281. $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$. **282.** $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$.

283. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$. **284.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

285*. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

286. Calcular el determinante de orden n, cuyos elementos se prefijan por las condiciones $a_{ij} = \text{mín}\,(i, j)$.

287. Calcular el determinante de orden n, cuyos elementos se dan por las condiciones $a_{ij} = \text{máx}\,(i, j)$.

288*. Calcular el determinante de orden n, cuyos elementos se dan por las condiciones $a_{ij} = |\, i - j \,|$.

Calcular los siguientes determinantes con ayuda del método de separación de los factores lineales:

289. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$.

290. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix}$. **291.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$.

292. $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$. **293.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

294*. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.

Calcular los siguientes determinantes aplicando el método de relaciones recurrentes:

295*. $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$.

296*. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

297. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

298. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}$.

299. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

300. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

301. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$.

302. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

303. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

304. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Calcular los determinantes aplicando el método de representación de éstos en forma de suma de determinantes:

305*. $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$.

306*. $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

307*. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$.

308. $\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

Calcular los determinantes[1]:

309. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$,

310. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

311. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

312. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$.

313. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

314. $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$

315. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

316. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

317. $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$.

318. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

319. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

320. $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

---

[1]) En todos los casos en que no queda claro el orden del determinante, considérese igual a n.

321. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$.

322. $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

323. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

324. $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

325. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

326. $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$.

327. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$.

328. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}$.

329. $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

330. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \dots & x_n^3+x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_2^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$.

331. $$\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \dots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \dots & x+a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \dots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

332. $$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen}\varphi_1 & \operatorname{sen}^2\varphi_1 & \dots & \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \operatorname{sen}\varphi_2 & \operatorname{sen}^2\varphi_2 & \dots & \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \operatorname{sen}\varphi_n & \operatorname{sen}^2\varphi_n & \dots & \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

333. $$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_1 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos^2\varphi_n & \dots & \cos^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

334. $$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_{n-1}(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

donde $\varphi_k(x)=x^k+a_{k1}x^{k-1}+a_{k2}x^{k-2}+\dots+a_{kk}$.

335. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f_1(\cos\varphi_1) & f_1(\cos\varphi_2) & \dots & f_2(\cos\varphi_n) \\ f_2(\cos\varphi_1) & f_2(\cos\varphi_2) & \dots & f_2(\cos\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(\cos\varphi_1) & f_{n-1}(\cos\varphi_2) & \dots & f_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix},$$

donde $f_k(x)=a_{k0}x^k+a_{k1}x^{k-1}+a_{k2}x^{k-2}+\dots+a_{kk}$.

336. $$\begin{vmatrix} 1 & C^1_{x_1} & C^2_{x_1} & \dots & C^{n-1}_{x_1} \\ 1 & C^1_{x_2} & C^2_{x_2} & \dots & C^{n-1}_{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C^1_{x_n} & C^2_{x_n} & \dots & C^{n-1}_{x_n} \end{vmatrix},$$

donde $C^k_x=\dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$.

337. $$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

338. $$\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-1} & \dfrac{x_2}{x_2-1} & \dots & \dfrac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

339. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$.

340. $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$.

341. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_1 & \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_1\cos\alpha_1 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_2 & \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_2\cos\alpha_2 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_n & \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_n\cos\alpha_n & \dots & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}$.

342. $\begin{vmatrix} f_n(x_1, y_1) & y_1 f_{n-1}(x_1, y_1) & \dots & y_1^{n-1}f_1(x_1, y_1) & y_1^n \\ f_n(x_2, y_2) & y_2 f_{n-1}(x_2, y_2) & \dots & y_2^{n-1}f_1(x_2, y_2) & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_{n+1}, y_{n+1}) & y_{n+1}f_{n-1}(x_{n+1}, y_{n+1}) & \dots & y_{n+1}^{n-1}f_1(x_{n+1}, y_{n+1}) & y_{n+1}^n \end{vmatrix}$,

donde $f_i(x, y)$ es un polinomio x, y homogéneo de grado i.

343*. $\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ a_2 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

344*. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$.

345. $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

346. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

347*. $\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \dots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}$.

348*. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$.

349*. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \ldots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos 2\varphi_2 & \ldots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos 2\varphi_n & \ldots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix}.$

350*. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi_1 & \operatorname{sen} 2\varphi_1 & \ldots & \operatorname{sen} n\varphi_1 \\ \operatorname{sen}\varphi_2 & \operatorname{sen} 2\varphi_2 & \ldots & \operatorname{sen} n\varphi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{sen}\varphi_n & \operatorname{sen} 2\varphi_n & \ldots & \operatorname{sen} n\varphi_n \end{vmatrix}.$

351*. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$

352. $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix}.$

353*. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x \end{vmatrix}.$

354. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \ldots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \ldots & a_2-b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \ldots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$

355. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \ldots & 1+x_1y_n \\ 2+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \ldots & 1+x_2y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \ldots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$

356. $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \ldots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \ldots & f_2(a_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \ldots & f_n(a_n) \end{vmatrix},$

donde $f_i(x)$ es un polinomio de un grado que no supera $n-2$.

357. $\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \ldots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \ldots & a_2+b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \ldots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}.$

358*. $\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \ldots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & 1+x_2y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{vmatrix}.$

359*. $\begin{vmatrix} a_1-b_1+x & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2+x & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n+x \end{vmatrix}$.

360. $\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}$.

361*. $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$

(el orden del determinante es $2n$).

362. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{2n-1} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}$.

363. $\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}$.

364*. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

365*. La serie numérica que comienza por los números 1, 2, y en la cual cada uno de los números siguientes es igual a la suma de los dos anteriores, o sea, la serie 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . ., se denomina serie de Fibonacci.

Demostrar que el n-ésimo término de la serie mencionada es igual al determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

366. $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

367. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

368. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

369*. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$.

370. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a \end{vmatrix}$.

371*. Demostrar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

Obtener la expresión $\cos n\alpha$ a través de $\cos\alpha$, utilizando dicha igualdad y el resultado del problema 369.

372. Demostrar la igualdad

$$\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix},$$

donde el determinante tiene el orden $n-1$. Empleando esa igualdad y el resultado del problema 369, representar $\operatorname{sen} n\alpha$ en forma del producto de $\operatorname{sen}\alpha$ por el polinomio de $\cos\alpha$.

373*. Demostrar la igualdad sin calcular los propios determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & b_3c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

374. $$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

375. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

376*. $$\begin{vmatrix} a & a+x & a+2x & \dots & a+(n-2)x & a+(n-1)x \\ a+(n-1)x & a & a+x & \dots & a+(n-3)x & a+(n-2)x \\ a+(n-2)x & a+(n-1)x & a & \dots & a+(n-4)x & a+(n-3)x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+x & a+2x & a+3x & \dots & a+(n-1)x & a \end{vmatrix}.$$

377. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

378. Sin calcular los determinantes establecer de qué modo se relacionan entre sí los dos circulantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

construidos de unos mismos números $a_1, a_2, \dots, a_n$, utilizando las permutaciones circulares en dos direcciones opuestas.

Calcular los determinantes:

379*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix},$$

donde $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

380*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+2}{1} & \dots & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \binom{m+3}{2} & \dots & \binom{m+n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \binom{m+n+1}{n} & \dots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}.$$

381*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

382*. $$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{n} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \binom{n+2}{2} & \dots & \binom{n+2}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \dots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}.$$

383*. $$\begin{vmatrix} \binom{p+n}{n} & \binom{p+n+1}{n} & \dots & \binom{p+2n}{n} \\ \binom{p+n+1}{n} & \binom{p+n+2}{n} & \dots & \binom{p+2n+1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{p+2n}{n} & \binom{p+2n+1}{n} & \dots & \binom{p+3n}{n} \end{vmatrix}.$$

384*. $$\begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \dots & \binom{p}{n} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \dots & \binom{p+1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{p+n}{1} & \binom{p+n}{2} & \dots & \binom{p+n}{n} \end{vmatrix}.$$

385*. $$\begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \dots & \binom{m}{p+n} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \dots & \binom{m+1}{p+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+n}{p} & \binom{m+n}{p+1} & \dots & \binom{m+n}{p+n} \end{vmatrix}.$$

386*. $$\begin{vmatrix} 1 & \binom{2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \dots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{3} & \binom{n+1}{4} & \dots & \binom{n+1}{n} \end{vmatrix}.$$

387*. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 6 & 10 & \dots & \frac{n(n+1)}{2!} \\ 4 & 10 & 20 & \dots & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & \frac{n(n+1)}{2!} & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} & \dots & \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!} \end{vmatrix}.$$

388*. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

389*. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & 0 & \dots & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2 & 3! & 0 & \dots & x^3 \\ 1 & 4 & 4\cdot 3 & 4\cdot 3\cdot 2 & 4! & \dots & x^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & n(n-1)(n-2)(n-3) & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

390*. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_0 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

391*. $$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

392. $$\begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a \end{vmatrix}.$$

393. $$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

394. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & x & x & \dots & x \\ 1 & y & a_2 & x & \dots & x \\ 1 & y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

395. $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

396. $$\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{vmatrix}.$$

397. $$\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!\,a_1 & (n-2)!a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

398. $$\begin{vmatrix} \operatorname{cosec}\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\operatorname{cosec}\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\operatorname{cosec}\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\operatorname{cosec}\alpha \end{vmatrix}.$$

399*. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

400. $$\begin{vmatrix} a^p-x & a^{p+1}-x & \dots & a^{p+n-1}-x \\ a^{p+n}-x & a^{p+n+1}-x & \dots & a^{p+2n-1}-x \\ \hdotsfor{4} \\ a^{p+n(n-1)}-x & a^{p+n(n-1)+1}-x & \dots & a^{p+n^2-1}-x \end{vmatrix}.$$

401. $$\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \dots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \dots & a^{n+1} \\ \hdotsfor{5} \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \dots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}.$$

402. $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

403. $$\begin{vmatrix} c_0 & b & b & b & \dots & b \\ a & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ a & 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix}.$$

404*. $$\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \dots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \dots & -(n-1)\,b \\ 1 & (n-1)\,a & a & -3b & \dots & -(n-1)\,b \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 2a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}.$$

405*. $$\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x_2-a_2)^2 & \dots & a_n^2 \\ \hdotsfor{4} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

406. $$\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & (x_2-a_2)^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & (x_3-a_3)^2 & \dots & a_3a_n \\ \hdotsfor{5} \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \dots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

407*. $$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

408. $$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & \dots & a_n \\ \hdotsfor{5} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

409*. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

410*. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

411*. $$\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \dots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}.$$

412. $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix}.$$

413. $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+4 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & x+2^n \end{vmatrix}.$$

414. $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \dots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}.$$

415. $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+a & x & \dots & x \\ x & x & x+a^2 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & x+a^n \end{vmatrix}.$$

416*. $$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

417*. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1-a_1} & \frac{1}{x_1-a_2} & \dots & \frac{1}{x_1-a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_n-a_1} & \frac{1}{x_n-a_2} & \dots & \frac{1}{x_n-a_n} \end{vmatrix}.$$

418*. $$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

419*. $$\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$$

420*. Obtener la ley de composición de una expresión extendida para el continuante de orden n [1]:

$$(a_1a_2 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

o sea, las expresiones en forma de un polinomio de $a_1, a_2, \dots, a_n$. Escribir los continuantes del orden 4, 5 y 6 en forma extendida.

§ 6. Menores, cofactores y teorema de Laplace

421. ¿Cuántos menores de orden k contiene el determinante de orden n?

422. Demostrar que para determinar el signo del cofactor puede utilizarse la suma de los números de las filas y columnas no del menor dado, sino del complementario a éste. En otras palabras, si M es el menor dado, M', el menor complementario, A, el cofactor del menor M, A', el cofactor del menor M', entonces de $A = \varepsilon M'$, donde $\varepsilon = \pm 1$, se desprende que $A' = \varepsilon M$.

423. Mostrar que el desarrollo de Laplace del determinante de orden n por cualesquiera k filas (columnas) coincide con su descomposición por las demás $n - k$ filas (columnas).

[1] La denominación «continuante» se debe a la relación con las fracciones continuas, que vendrá establecida en el problema 539.

424*. Mostrar que la regla de los signos que enlaza el cofactor A con el menor complementario M' del menor M, puede enunciarse de la siguiente manera: sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ los números de las filas, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ los números de las columnas del menor M en el determinante D de orden n, escritos en orden creciente, y

$$\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n \quad \text{y} \quad \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$$

los números de las filas y columnas respectivamente del menor complementario M', escritos también en orden creciente; entonces $A = M'$, si la sustitución $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$ es par, y $A = -M'$, si esa sustitución es impar.

Calcular los determinantes, aplicando el teorema de Laplace:

425. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

426. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

427. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

428. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

429. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

430. $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

431. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

432. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

433. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

434. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

435. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

436. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$

437. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma \end{vmatrix}.$

438. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a' & b' & c' \\ a & a' & x_1 & y_3 & y_2 \\ b & b' & y_3 & x_2 & y_1 \\ c & c' & y_2 & y_1 & x_3 \end{vmatrix}.$

439. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$

440. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

441. $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}.$

442. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}.$

443.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,\,2n-2} & a_{1,\,2n-1} & a_{1,\,2n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,\,2n-2} & a_{2,\,2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,\,2n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{2n-2,\,3} & \dots & a_{2n-2,\,2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1,\,2} & a_{2n-1,\,3} & \dots & a_{2n-1,\,2n-2} & a_{2n-1,\,2n-1} & 0 \\ a_{2n,\,1} & a_{2n,\,2} & a_{2n,\,3} & \dots & a_{2n,\,2n-2} & a_{2n,\,2n-1} & a_{2n,\,2n} \end{vmatrix}.$$

444. $\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \dots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \dots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \dots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \dots & a_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \dots & x_n^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \dots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \dots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$

Utilizando el teorema de Laplace, calcular los siguientes determinantes, transformándolos antes:

445*. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

446. $$\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

447. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

448. $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

449. $$\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

450. $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

451. $$\begin{vmatrix} 1+x & x & \ldots & x & x & \ldots & x & 1+x \\ x & 1+x & \ldots & x & x & \ldots & 1+x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & \ldots & 1+x & 1+x & \ldots & x & x \\ x & x & \ldots & 1+2x & 1+x & \ldots & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & 1+2x & \ldots & x & x & \ldots & 1+x & x \\ 1+2x & x & \ldots & x & x & \ldots & x & 1+x \end{vmatrix}$$

(el orden del determinante es igual a $2n$).

452. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ c_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

453. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & x & a_1 & a_2-1 & \dots & a_{n-1}-1 & a_n-1 \\ 1 & 1 & \dots & x & 1 & a_1-1 & a_2 & \dots & a_{n-1}-1 & a_n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 1 & \dots & 1 & 1 & a_1-1 & a_2-1 & \dots & a_{n-1}-1 & a_n \\ a_1-x & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & -a_1 & -a_1 & \dots & -a_1 & x-a_1 \\ a_2 & a_2-x & \dots & a_2 & a_2 & -a_2 & -a_2 & \dots & x-a_2 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n & a_n-x & x-a_n & -a_n & \dots & -a_n & -a_n \end{vmatrix}.$$

454. En el determinante D de orden par $n = 2k$ separemos cuatro menores M_1, M_2, M_3 y M_4 de orden k, como se muestra en el esquema

$$\begin{array}{c} \qquad M_1 \qquad\qquad\qquad\qquad M_2 \\ \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right| \\ \qquad M_3 \qquad\qquad\qquad\qquad M_4 \end{array}$$

Expresar el determinante D mediante los menores M_1, M_2, M_3 y M_4 para los dos siguientes casos:

a) si todos los elementos de M_2 ó M_3 son nulos;

b) si todos los elementos de M_1 ó M_4 son nulos.

455. Supongamos que en el determinante D de orden $n = kl$ se separan l menores de orden k, situados a lo largo de la segunda diagonal, es decir, M_1 yace en las primeras k filas y últimas k columnas, M_2 en las siguientes k filas y anteriores k columnas, etc., y por fin, M_l se encuentra en las últimas k filas y primeras k columnas.

Expresar D por medio de $M_1, M_2, \dots, M_l$ si todos los elementos de D, yacentes por un lado de la citada cadena de menores, son nulos.

456. Sea que en el determinante D de orden n se separan k filas y l columnas, con la particularidad de que $l \leqslant k$ y todos los elementos de las l columnas elegidas, no yacentes en las k filas separadas, son nulos. Demostrar que en el desarrollo de Laplace del determinante D por las k filas separadas es necesario tomar sólo aquellos

menores de orden k que poseen las l columnas elegidas; la afirmación que se obtiene cambiando de lugar las filas y columnas, también es justa.

457. Resolver el problema 206 usando el teorema de Laplace.

458. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

459*. Calcular el determinante de orden $k+l$:

$$\left.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 & 3 & & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}\right. \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} k \text{ filas} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} l \text{ filas} \end{matrix}$$

460. Escribir la descomposición del continuante (compárese con el problema 420) de orden n:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

por las primeras k filas. ¿Qué propiedad de los números de Fibonacci (problema 365) se obtiene de aquí para $n = 2k$?

461. Sin suprimir los paréntesis demostrar que la igualdad

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + \\ + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0$$

es válida para cualesquiera valores de a, b, c, d, a', b', c', d'.

462*. En la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,2n} \end{array}\right)$$

que contiene n filas y $2n$ columnas, cogemos cualquier menor M de orden n que posee, por lo menos, la mitad de las columnas que se encuentran a la izquierda del centro de la matriz.

Sea σ la suma de los números de las columnas del menor M y sea M' el menor de orden n compuesto de las demás columnas de la matriz. Demostrar que $\sum (-1)^{\sigma} MM' = 0$, donde la suma se toma por todos los menores M del citado tipo.

463*. Mostrar que los tres determinantes

$$D = \begin{vmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 & a_1x_2 & b_1x_2 & a_1x_3 & b_1x_3 \\ a_2x_1 & b_2x_1 & a_2x_2 & b_2x_2 & a_2x_3 & b_2x_3 \\ a_1y_1 & b_1y_1 & a_1y_2 & b_1y_2 & a_1y_3 & b_1y_3 \\ a_2y_1 & b_2y_1 & a_2y_2 & b_2y_2 & a_2y_3 & b_2y_3 \\ a_1z_1 & b_1z_1 & a_1z_2 & b_1z_2 & a_1z_3 & b_1z_3 \\ a_2z_1 & b_2z_1 & a_2z_2 & b_2z_2 & a_2z_3 & b_2z_3 \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

están relacionados mediante la igualdad $D = \delta^2\Delta^2$ [1]).

464*. Sean

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4,$$
$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

y

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 + px^2 + qx + r.$$

Mostrar que

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f(\gamma) \\ g(\alpha) & g(\beta) & g(\gamma) \\ h(\alpha) & h(\beta) & h(\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ r & q & p & 1 & 0 \\ 0 & r & q & p & 1 \end{vmatrix}.$$

465. Se dice que el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & x_{n1} & \ldots & x_{nk} \\ y_{11} & \ldots & y_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ y_{k1} & \ldots & y_{kn} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

se obtiene, rebordeándolo por medio de k filas y k columnas del determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

---

[1]) La generalización de esta propiedad se da en el problema 540.

Demostrar que para $k > n$, $D = 0$, mientras que para $k \leqslant n$, D es una forma (o sea, un polinomio homogéneo) de grado $n - k$ con respecto a los elementos a_{ij} del determinante Δ y una forma de grado $2k$ con respecto a los elementos rebordeantes x_{ij}, y_{ij}, para los cuales sirven de coeficientes los cofactores de los menores del k-ésimo orden en el determinante Δ. A saber: demostrar que

$$D = (-1)^k \sum A_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 j_2 \ldots j_k} X_{i_1 i_2 \ldots i_k} Y_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

donde $A_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 j_2 \ldots j_k}$ es el cofactor del menor del determinante Δ que se encuentra en las filas con los números $i_1, i_2, \ldots, i_k$ y en las columnas con los números $j_1, j_2, \ldots, j_k$, y $X_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ e $Y_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ son los menores del determinante D compuestos de los elementos rebordeantes y los menores que yacen en las filas (columnas, respectivamente) con los números indicados. La suma se toma por todas las combinaciones de los índices que varían desde la unidad hasta n, a condición de que $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.

466*. Demostrar la siguiente generalización del teorema de Laplace: si las filas del determinante D de orden n se dividen en p sistemas sin filas comunes, con la particularidad de que en el primer sistema entran las filas con números $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, y en el segundo, las filas con números $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2} < \ldots < \alpha_{k+l}$, etc., y por fin, el último sistema lo constituyen las filas con números $\alpha_{n-s+1} < \alpha_{n-s+2} < \ldots < \alpha_n$, luego si en la matriz del primer sistema de filas se toma el menor M_1 del orden k, yacente en las columnas con números $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k$, en la segunda matriz el menor M_2 del orden l, yacente en las columnas con números $\beta_{k+1} < \beta_{k+2} < \ldots < \beta_{k+l}$, diferentes de los números de las columnas de M_1, etc., y finalmente, en la última matriz, el menor M_p del orden s que se halla en las restantes columnas con números $\beta_{n-s+1} < \beta_{n-s+2} < \ldots < \beta_n$, y si después formamos el producto $\varepsilon M_1 M_2 \ldots M_p$, donde $\varepsilon = +1$, si la sustitución

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

es par y $\varepsilon = -1$, si esta sustitución es impar, entonces el determinante D es igual a la suma de todos los posibles productos de semejante tipo. El hecho de que esta afirmación generaliza el teorema de Laplace, se desprende del problema 424.

§ 7. Multiplicación de los determinantes

467. Multiplicar los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

mediante todos los cuatro procedimientos posibles (o sea, multiplicando las filas o las columnas del primer determinante por las filas o columnas del segundo) y comprobar que en todos los casos el valor del determinante obtenido es igual al producto de los valores de los determinantes dados.

468. Calcular el determinante, elevándolo al cuadrado

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}.$$

469. Calcular el determinante, elevándolo al cuadrado

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & d & -c & f & -e & -h & g \\ -c & -d & a & b & g & h & -e & -f \\ -d & c & -b & a & h & -g & f & -e \\ e & -f & -g & -h & a & b & c & d \\ -f & e & -h & g & -b & a & -d & c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & f & e & -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

Calcular los siguientes determinantes, representándolos en forma de productos de determinantes:

470*. $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

471. $$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$$

472. $$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) & \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \dots & \cos(\alpha_1-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_2) & 1 & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & \dots & \cos(\alpha_2-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & 1 & \dots & \cos(\alpha_3-\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_1-\alpha_n) & \cos(\alpha_2-\alpha_n) & \cos(\alpha_3-\alpha_n) & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

473. $$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} 2\alpha_1 & \operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_n) \\ \operatorname{sen}(\alpha_2+\alpha_1) & \operatorname{sen} 2\alpha_2 & \dots & \operatorname{sen}(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sen}(\alpha_n+\alpha_1) & \operatorname{sen}(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \operatorname{sen} 2\alpha_n \end{vmatrix}.$$

474. $\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \frac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \dots & \frac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \frac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \frac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \dots & \frac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \frac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \dots & \frac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}$.

475. $\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$.

476*. $\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}$.

477. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$, donde $s_k = x_1^k+x_2^k+\dots x_n^k$

478*. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$, donde $s_k = x_1^k + x_1^k + \dots + x_n^k$.

479*. Demostrar que el valor del circulante se define mediante la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n),$$

donde $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ son todos los valores de la raíz de n-ésimo grado de la unidad.

480. Demostrar que teniendo las designaciones del problema anterior

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n).$$

481*. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \dots & \alpha^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

482. Calcular el determinante, aplicando el resultado del problema 479

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

483. Utilizando el resultado del problema 479, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ d & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

484. $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & C_n^1 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & 1 & 1 & \dots & C_n^{n-3} & C_n^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

485. $$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \dots & (n-1)\,a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a & 3a^2 & 4a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

486*. Demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \dots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \dots & s-a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s-a_2 & s-a_3 & \dots & s-a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

donde $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Calcular los determinantes:

487*. $$\begin{vmatrix} \overbrace{-1 & -1 & -1 & \dots & -1}^{(p\ \text{columnas})} & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1 & 1}^{(n-p\ \text{columnas})} \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

488*. $$\begin{vmatrix} \overbrace{a & a & a & \dots & a}^{(p \text{ columnas})} & \overbrace{b & b & \dots & b & b}^{(n-p \text{ columnas})} \\ b & a & a & \dots & a & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & a & a & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

489*. $$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \dots & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \dots & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \dots & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \cos\frac{4\pi}{n} & \dots & \cos\frac{\pi}{n} \end{vmatrix}.$$

490*. $$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \dots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \cos 2\theta & \dots & \cos(n-1)\theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \dots & \cos 0 \end{vmatrix}.$$

491. $$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & \operatorname{sen}(a+h) & \operatorname{sen}(a+2h) & \dots & \operatorname{sen}[a+(n-1)h] \\ \operatorname{sen}[a+(n-1)h] & \operatorname{sen} a & \operatorname{sen}(a+h) & \dots & \operatorname{sen}[a+(n-2)h] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sen}(a+h) & \operatorname{sen}(a+2h) & \operatorname{sen}(a+3h) & \dots & \operatorname{sen} a \end{vmatrix}.$$

492*. $$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ (n-1)^2 & n^2 & 1^2 & \dots & (n-2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & 1^2 \end{vmatrix}.$$

493*. Calcular el circulante antisimétrico (o el determinante anticíclico):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

494. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n z & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} z & a_n z & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 z & a_3 z & a_4 z & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

donde z es cualquier número.

495*. Demostrar que el circulante de orden $2n$ con la primera fila compuesta de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$ es igual al producto del circulante de orden n, cuya primera fila está formada de elementos $a_1 + a_{n+1}, a_2 + a_{n+2}, \ldots, a_n + a_{2n}$ y el circulante antisimétrico de orden n con la primera fila compuesta de elementos $a_1 - a_{n+1}, a_2 - a_{n+2}, \ldots, a_n - a_{2n}$.

496*. Demostrar la identidad de Euler

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \\ = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + \\ + (x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3)^2 + \\ + (x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2)^2 + \\ + (x_1y_4 - x_2y_4 + x_3y_2 - x_4y_1)^2$$

multiplicando los dos determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{vmatrix}.$$

¿Qué propiedad de los números enteros se desprende de eso?

497*. Por medio de la multiplicación de los determinantes, demostrar la identidad

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c') = \\ = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

donde $A = aa' + bc' + cb'$, $B = ac' + bb' + ca'$, $C = ab' + + ba' + cc'$. ¿Qué propiedad de los números enteros se deduce de aquí?

498*. Empleando las designaciones del problema anterior, demostrar la identidad

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'b' - a'c' - b'c') = \\ = A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC.$$

499*. Demostrar la siguiente generalización del teorema sobre la multiplicación de los determinantes. Supongamos que se dan dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

cada una compuesta de m filas y n columnas.

Combinando las filas de una matriz con las filas de la otra y suponiendo que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}$, formemos el determinante de orden m

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Después designemos por $A_{i_1, i_2, \dots, i_m}$, y $B_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ los menores de orden m de las matrices A y B respectivamente, formados de las columnas de dichas matrices con los números $i_1, i_2, \dots, i_m$ en el mismo orden. Entonces

$$D = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant n} A_{i_1, i_2, \dots, i_m} B_{i_1, i_2, \dots, i_m} \qquad (1)$$

para $m \leqslant n$ (fórmula de Binet—Cauchy), es decir, el determinante D es igual a la suma de los productos de todos los menores de orden m de la matriz A por los correspondientes menores de la matriz B. Para $m > n$

$$D = 0. \qquad (2)$$

500*. Demostrar la afirmación (2) del problema que precede, aplicando el teorema de la multiplicación de los determinantes.

501*. Sin realizar la multiplicación, demostrar la identidad de Cauchy

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n)(b_1d_1 + b_2d_2 + \dots + b_nd_n) -$$
$$-(a_1d_1 + a_2d_2 + \dots + a_nd_n)(b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_nc_n) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_ib_k - a_kb_i)(c_id_k - c_kd_i) \qquad (n > 1).$$

502. Sin multiplicar, demostrar la identidad de Lagrange

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_ib_k - a_kb_i)^2.$$

503*. Demostrar que para cualesquiera números reales

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad \text{y} \quad b_1, b_2, \dots, b_n$$

es válida la desigualdad

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geqslant$$
$$\geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

con la particularidad de que el signo de igualdad se pone si, y sólo si, uno de los citados sistemas difiere del otro solamente por un factor numérico (puede ser igual a cero). (Desigualdad de Cauchy—Buniakovski.)

504*. Mostrar que para cualesquiera números complejos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se cumple la igualdad

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{a}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\overline{b}_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k b_k\right)=$$
$$=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)(\overline{a_j}\overline{b}_k-\overline{a}_k\overline{b}_j).$$

505*. Demostrar que para cualesquiera dos sistemas de números complejos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es válida la desigualdad

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)\geqslant\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k\right|^2,$$

con la particularidad de que el signo de igualdad aparece cuando y sólo cuando los números de uno de los sistemas dados se diferencian de los números del otro solamente por un factor numérico.

506*. Se denomina determinante recíproco (o adjunto) con respecto al determinante D de orden $n>1$, el determinante D' obtenido de D, sustituyendo todos los elementos por sus cofactores (conservando la disposición precedente).

Demostrar que

$$D'=D^{n-1} \tag{1}$$

507*. Sea M el menor de orden m del determinante D, A el cofactor de M, M' el menor del determinante recíproco D', correspondiente al menor M (o sea, formado de los cofactores de los elementos del determinante D que participan en M). Demostrar la igualdad $M'=D^{m-1}A$.

Si quedamos en que el menor complementario para todo el determinante D se considera igual a la unidad, dicha igualdad será una generalización de la del problema anterior (para $m=n$).

508*. Sea C el menor de orden $(n-2)$ obtenido del determinante D, suprimiendo las filas i-ésima y j-ésima y las columnas k-ésima y l-ésima, con la particularidad de que $i<j$ y $k<l$; como siempre, A_{pq} es el ofactor del elemento a_{pq}. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j+k+l}\,DC.$$

509*. Mostrar que si el determinante D es nulo, todas las filas (así como las columnas) del determinante recíproco son proporcionales.

510*. Sean a_{ij} el elemento del determinante D de orden n y A'_{ij} el cofactor del elemento correspondiente A_{ij} del determinante D', recíproco al D. Mostrar que $A'_{ij}=D^{n-2}a_{ij}$.

511*. Sean M el menor de orden m del determinante D de orden n, M' el correspondiente menor M del determinante recíproco D' y A' el cofactor del menor M'. Demostrar que $A'=D^{n-m-1}M$. Ello es la generalización del problema precedente.

512*. Sabiendo los menores de todos los elementos del determinante D, diferente de cero, hallar sus elementos.

513*. Sea

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$p = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Mostrar que

$$\begin{vmatrix} n+1 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n} \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

514. Mostrar que si

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}-x \end{vmatrix},$$

el producto $D(x) \cdot D(-x)$ puede representarse en forma de

$$\begin{vmatrix} A_{11}-x^2 & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-x^2 & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}-x^2 \end{vmatrix},$$

donde ningún A_{ij} depende de x. Hallar la expresión de A_{ij} mediante a_{kl}.

515*. Demostrar, multiplicando los determinantes, que al conmutar dos filas (o columnas), el determinante varía de signo.

516*. Demostrar, multiplicando los determinantes, que el determinante no varía si a una de sus filas (columnas) se le suma otra fila (columna), multiplicada por un número c.

517*. Mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_3 & 1 & \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & 1 \end{vmatrix}$$ es igual a cero si $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$.

518*. Sean l_1, l_2, l_3 y m_1, m_2, m_3 los cosenos de los ángulos entre dos semirrectas y los ejes ortogonales de coordenadas y φ el ángulo entre esas semirrectas. Demostrar que $\operatorname{sen}^2\varphi = (l_1m_2 - l_2m_1)^2 + (l_2m_3 - l_3m_2)^2 + (l_3m_1 - l_1m_3)^2$.

519. Sean α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 los ángulos entre las tres semirrectas L_1, L_2, L_3 y los ejes ortogonales de coordenadas y supongamos que los ángulos de dichas semirrectas sean entre sí

$\varphi_1 = \angle(L_2, L_3)$, $\varphi_2 = \angle(L_3, L_1)$ y $\varphi_3 = \angle(L_1, L_2)$. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= 1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_3 + 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3.$$

520*. Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) las coordenadas rectangulares de los puntos M_1, M_2 y M_3 en un plano. Mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

no varía al girar los ejes de coordenadas y trasladar el origen de coordenadas. Utilizando lo expuesto, aclarar su sentido geométrico.

521*. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las coordenadas rectangulares de dos puntos M_1 y M_2 en un plano. Después de esclarecer el sentido geométrico del determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, saber si varía éste al girar los ejes y trasladar el origen de coordenadas.

522*. Después de calcular el producto de los determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & R \\ x_2 & y_2 & R \\ x_3 & y_3 & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & R \end{vmatrix},$$

obtener la expresión para el radio del círculo circunscrito a través de los lados a, b, c y el área S del triángulo.

523*. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ respectivamente los cosenos de los ángulos que forman tres semirrectas ortogonales dos a dos OA, OB, OC con los ejes del sistema de coordenadas rectangular Ox, Oy, Oz. Demostrar que el determinante $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1$, con la particularidad de que el signo más tendrá lugar en caso de una misma orientación de los triedros $OABC$ y $Oxyz$ (ello significa la posibilidad de hacer coincidir OA con Ox, OB con Oy y OC con Oz, al girar la figura $OABC$) y el signo menos, en caso de una orientación opuesta (lo que significa que al coincidir OA con Ox y OB con OY, las semirrectas OC y Oz tendrán direcciones contrarias).

524*. Sean (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3) las coordenadas de tres puntos M_1, M_2 y M_3 en el espacio. Mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

no varía, al girar el sistema de coordenadas (que se supone rectangular), y esclarecer su sentido geométrico.

525*. Hallar el volumen V del paralelepípedo a través de las longitudes a, b, c de sus aristas que pasan por un vértice y los ángulos α, β, γ que forman esas aristas. (El ángulo α está formado por las aristas de longitudes b y c; β se forma por c y a; γ está formado por a y b.)

526*. Sean l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3 los cosenos de los ángulos de las semirrectas OA, OB, OC, respectivamente, con los semiejes positivos del sistema de coordenadas rectangular Ox, Oy, Oz.

Demostrar que para el carácter coplanar de las semirrectas OA, OB y OC (o sea, para situarlas en un mismo plano) es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

527*. Sean (x_i, y_i, z_i) las coordenadas rectangulares del punto M_i del espacio ($i = 1, 2, 3, 4$). Después de mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

no varía al trasladar el origen de coordenadas, esclarecer su sentido geométrico.

528*. Multiplicando los determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & R \\ x_2 & y_2 & z_2 & R \\ x_3 & y_3 & z_3 & R \\ x_4 & y_4 & z_4 & R \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & -z_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & -z_3 & R \\ -x_4 & -y_4 & -z_4 & R \end{vmatrix},$$

obtener la expresión para el radio de una esfera circunscrita alrededor de un tetraedro, mediante el volumen y la arista de éste. Hallar a partir de la expresión obtenida, en particular, el radio de la esfera, circunscrita alrededor de un tetraedro regular, cuya longitud de la arista es a.

§ 8. Diferentes problemas

529*. Mostrar que el determinante de orden n admite la siguiente definición axiomática (equivalente a la corriente).

A cualquier fila de n números [1]) la llamaremos vector y la designaremos por una letra negrilla. La adición de dos vectores y la multiplicación del vector por un número se determinan, como siempre,

---

[1]) En lugar de números pueden examinarse también los elementos de cualquier campo P.

es decir, si

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{y} \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

entonces

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

si c es un número, $ca = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$.

La función $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de n vectores con valores numéricos se denomina lineal por cada argumento (o más breve, polilineal) si

$$f(a_1, \ldots, c'a_i' + c''a_i'', \ldots, a_n) =$$
$$= c'f(a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n) + c''f(a_1, \ldots, a_i'', \ldots, a_n) \quad (\alpha)$$

para cualesquiera vectores que figuran aquí, cualesquiera números c', c'' y cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$. Prosiguiendo, denominaremos función que posee la propiedad de anularse si

$$f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{para} \quad a_i = a_j; \quad (\beta)$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Sea e_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) un vector que tiene en el i-ésimo lugar la unidad y en todos los demás, ceros. La función $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se llama normalizada si

$$f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1. \quad (\gamma)$$

Supongamos que se da una matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y $|A|$ es su determinante en el sentido corriente, o sea,

$$|A| = \sum (-1)^s a_{1i_1}, a_{2i_2} \ldots a_{ni_n},$$

donde la suma se toma por todas las permutaciones $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de los números $1, 2, \ldots, n$ y s es el número de inversiones en cada permutación.

Mostrar que

1) el determinante $|A|$ como función de las filas de la matriz A posee las propiedades (α), (β) y (γ);

2) cualquier función de n vectores, que posee las propiedades (α) y (β), satisface la igualdad $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = |A| \times f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, donde A es la matriz con las filas $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

3) cualquier función $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que posee las propiedades (α), (β) y (γ), es igual al determinante $|A|$ de la matriz A con las filas $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En otras palabras, el determinante $|A|$ de la matriz A es la única función polilineal, normalizada de sus filas que posee la propiedad de anularse.

530*. Usando la afirmación 2) del problema anterior, demostrar el teorema de la multiplicación de los determinantes.

531. Mostrar que para las funciones de n vectores por encima del campo de la característica diferente de 2, existiendo la propiedad (α), la (β) es equivalente a una función de signo variable, o sea,

$$f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = -f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \qquad (\beta')$$

para cualesquiera vectores e $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$. Dar un ejemplo de una función de n vectores por encima del campo P de la característica igual a 2 que posee las propiedades (α), (β') y (γ), pero no posee la (β).

532*. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \ldots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}, \text{ donde } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

533*. ¿Cómo variará el determinante si en él se separan k filas (o columnas) y de cada una de ellas se restan todas las demás filas elegidas?

534. El determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \ldots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \ldots & a_{2n}+x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

representarlo en forma de un polinomio situado según las potencias de x.

535*. Demostrar que la suma de los cofactores de todos los elementos del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

es igual al determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \ldots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \ldots & a_{3n}-a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \ldots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}.$$

536*. Demostrar que la suma de los cofactores de todos los elementos del determinante no varía si a todos los elementos se les añade un mismo número.

537*. Demostrar que si todos los elementos de cualquier fila (o columna) del determinante son iguales a la unidad, la suma de los cofactores de todos los elementos de éste será igual al propio determinante.

538. Demostrar que el determinante antisimétrico de orden par no varía si a todos sus elementos se les añade un mismo número.

539*. Establecer la siguiente relación entre los continuantes (la expresión extendida del continuante se da en el problema 420)

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

con las fracciones continuas:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots+\cfrac{1}{a_n}}}=\frac{(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)}{(a_2\ a_3\ \dots\ a_n)}.$$

540*. Supongamos que se dan dos determinantes:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{de orden } n$$

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix} \quad \text{de orden } p.$$

Compongamos un determinante de orden np:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1p} & \dots & a_{1n}b_{1p} \\ a_{21}b_{11} & \dots & a_{2n}b_{11} & a_{21}b_{12} & \dots & a_{2n}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1p} & \dots & a_{2n}b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11} & \dots & a_{nn}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \dots & a_{nn}b_{12} & \dots & a_{n1}b_{1p} & \dots & a_{nn}b_{1p} \\ a_{11}b_{21} & \dots & a_{1n}b_{21} & a_{11}b_{22} & \dots & a_{1n}b_{22} & \dots & a_{11}b_{2p} & \dots & a_{1n}b_{2p} \\ a_{21}b_{21} & \dots & a_{2n}b_{21} & a_{21}b_{22} & \dots & a_{2n}b_{22} & \dots & a_{21}b_{2p} & \dots & a_{2n}b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{21} & \dots & a_{nn}b_{21} & a_{n1}b_{22} & \dots & a_{nn}b_{22} & \dots & a_{n1}b_{2p} & \dots & a_{nn}b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{p1} & \dots & a_{nn}b_{p1} & a_{n1}b_{p2} & \dots & a_{nn}b_{p2} & \dots & a_{n1}b_{pp} & \dots & a_{nn}b_{pp} \end{vmatrix}.$$

Así, pues, la matriz del determinante D consta de p^2 células de n filas y n columnas cada una. La célula que se encuentra en la i-ésima

fila celular y j-ésima columna celular (para cualesquiera $i, j = 1, 2, \ldots, p$), se obtiene de la matriz del determinante A, multiplicando todos sus elementos por b_{ij}. Demostrar que $D = A^p B^n$. El determinante D se denomina producto de Kronecker de los determinantes A y B (véanse los problemas 963 y 965).

541. Demostrar la siguiente regla de desarrollo del determinante rebordeado: si

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y A_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij}, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & z \end{vmatrix} = Dz - \sum_{i,\, j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j.$$

542*. Supongamos que los elementos del determinante D son polinomios de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_s$ con coeficientes numéricos (o de un campo P arbitrario), con la particularidad de que $D = 0$. Demostrar que los cofactores de los elementos del determinante D pueden representarse en forma de $A_{ij} = A_i B_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, donde todos A_i y B_i son polinomios de $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Hallar dichos polinomios para el determinante Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix},$$

donde a, b, c se toman a título de incógnitas.

543*. Demostrar, usando los dos problemas anteriores, que el determinante antisimétrico de orden par es el cuadrado de cierto polinomio de sus elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal.

544*. Mostrar que si en la expresión general del determinante antisimétrico se sustituye cada elemento a_{ji} por $-a_{ij}$, siendo $j > i$, se reducen todos los términos con tales índices, cuyas sustituciones, al desarrollarlas en ciclos, dan por lo menos un ciclo de longitud impar.

545*. Sea D un determinante antisimétrico de orden par n con elementos $a_{ij} = -a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Se denomina *producto de Pfaff del determinante D* el producto

$$\varepsilon a_{i_1, i_2} a_{i_3, i_4} \ldots a_{i_{n-1}, i_n},$$

en el cual los índices de los $n/2$ elementos que participan en él, forman una permutación de $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de los números $1, 2, \ldots, n$; $\varepsilon =$

$= +1$, si dicha permutación es par, y $\varepsilon = -1$ si ésta es impar. El producto de Pfaff se llama *reducido* si consta sólo de elementos, yacentes en D por encima de la diagonal principal (es decir, si cada elemento posee el primer índice inferior al segundo). Denominaremos *esencial* al término del determinante D si la sustitución de sus índices tiene sólo ciclos de longitud par. Un par de productos de Pfaff reducidos N_1, N_2 (en el orden dado) se llama *correspondiente* a dicho término esencial del determi ante D si se confecciona según este término de la siguiente manera. Supongamos que la sustitución de los índices de dicho término se escribe en ciclos de este modo:

$$(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{h-1}\alpha_h)(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{g-1}\beta_g) \ldots (\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{k-1}\mu_k), \tag{1}$$

con la particularidad de que $\alpha_1 = 1$ y cada ciclo, comenzando desde el segundo, empieza por el número mínimo entre los números que no entran en los ciclos precedentes. Construimos los productos de Pfaff

$$N_1' = \varepsilon_1 a_{\alpha_1, \alpha_2} a_{\alpha_3, \alpha_4} \ldots a_{\alpha_{h-1}, \alpha_h} a_{\beta_1, \beta_2} a_{\beta_3, \beta_4} \ldots$$
$$\ldots a_{\beta_{g-1}, \beta_g} \ldots a_{\mu_1, \mu_2} a_{\mu_3, \mu_4} \ldots a_{\mu_{k-1}, \mu_k}$$

y

$$N_2' = \varepsilon_2 a_{\alpha_2, \alpha_3} a_{\alpha_4, \alpha_5} \ldots a_{\alpha_h, \alpha} a_{\beta_2, \beta_3} a_{\beta_4, \beta_5} \ldots a_{\beta_g, \beta_1} \ldots$$
$$\ldots a_{\mu_2, \mu_3} a_{\mu_4, \mu_5} \ldots a_{\mu_k, \mu_1},$$

y luego cada elemento a_{ij}, donde $i > j$ lo sustituimos por $-a_{ji}$.

Varía el signo de ε_1 o de ε_2, respectivamente, pero también cambia la clase de permutación, de modo que después de cada sustitución obtenemos de nuevo un producto de Pfaff. Al ejecutar en N_1' y N_2' las sustituciones indicadas, obtenemos un par de productos de Pfaff reducidos de N_1, N_2, correspondiente al mencionado término esencial D.

Demostrar que:

1) Cualquier par de los productos de Pfaff reducidos (diferentes o iguales) corresponden a uno y sólo a un término esencial del desarrollo general del determinante D. (En un desarrollo general de D los términos obtenidos uno de otro mediante las sustituciones tipo $a_{ij} = -a_{ji}$, se consideran diferentes.) En otras palabras, se establece una correspondencia biunívoca entre todos los términos esenciales y todos los pares de productos de Pfaff reducidos del determinante D.

2) Cada uno de los términos esenciales es igual al producto de los productos de Pfaff reducidos del par que le corresponde.

3) $D = p^2$, donde p es la suma de todos los productos de Pfaff reducidos, denominada agregado de Pfaff o pfaffiano del determinante D.

546*. Demostrar la siguiente fórmula recurrente, cómoda para calcular el agregado de Pfaff, determinado en el problema anterior. Si p_n es un agregado de Pfaff del determinante antisimétrico $D_n = |a_{ij}|$ del orden par $n > 2$, y p_{in} el agregado de Pfaff del determinante D_{in}, obtenido de D_n, restando las filas n-ésima e i-ésima, así como las correspondientes columnas, donde $i = 1, 2, \ldots, n-1$,

entonces

$$p_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} p_{in} a_{in}; \quad p_2 = a_{12}.$$

Mostrar que p_{in} se recibe de p_{n-2}, aumentando en 1 todos los índices de los elementos, mayores o iguales a i.

547. Calcular los pfaffianos p_2, p_4, p_6, empleando la fórmula del problema precedente.

548. Haciendo uso de la fórmula del problema 546, hallar la cantidad de sumandos del agregado de Pfaff p_n del determinante antisimétrico D_n del orden par n, o sea, el número de diferentes productos de Pfaff reducidos del determinante D_n (los productos que difieren sólo por el orden de los factores, no se consideran diferentes).

549*. Sean D un determinante antisimétrico del orden impar n con elementos a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ y M_{ij} el menor del elemento a_{ij}, $p_{i,n+1}$ el agregado de Pfaff del menor M_{ii}. Mostrar que $M_{ij} = p_{i,n+1} p_{j,n+1}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Prosiguiendo, mostrar que a título de polinomios A_i, B_j del problema 542 (a condición de que los elementos D que se encuentran por encima de la diagonal principal se consideran incógnitas $x_1, \ldots, x_s$) pueden tomarse $A_i = (-1)^{i-1} p_{i,n+1}$, $B_j = (-1)^{j-1} p_{j,n+1}$.

Comprobar que para el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

se obtiene, mediante ese procedimiento, el mismo resultado que en el problema 542 (si se toma en consideración que en el problema 542 A_i y B_j se definen con una precisión de hasta la variación de signo de todos esos polinomios).

550*. Demostrar que el determinante de forma general, considerado como un polinomio de sus elementos, tomados en calidad de incógnitas, no se descompone en dos factores, cada uno de los cuales es un polinomio de las mismas incógnitas del grado diferente de cero. En otras palabras, el determinante es un polinomio irreducible de sus elementos y, además, por encima de cualquier campo.

551*. Sean $D = |a_{ij}|$ un determinante del orden $n > 1$, k, cualquier número de $1, 2, \ldots, n$, $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$; designemos por $s_1, s_2, \ldots, s_{\binom{n}{k}}$ todo género de combinaciones de n números $1, 2, \ldots, n$ según k, numeradas en un orden arbitrario que posteriormente queda invariable (para precisión, los números en cada combinación pueden considerarse situados en orden creciente, aunque en lo sucesivo ello no tiene importancia); μ_{ij} el menor de orden k del determinante D que se encuentra en la intersección de las filas con números de la combinación s_i y de las columnas con números de la combinación s_j, $i, j = 1, 2, \ldots, \binom{n}{k}$; α_{ij} el cofactor del menor μ_{ij} en D. Denominaremos el determinante de

orden $\binom{n}{k}$ que tiene el aspecto

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1\binom{n}{k}} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2\binom{n}{k}} \\ \mu_{\binom{n}{k}1} & \mu_{\binom{n}{k}2} & \dots & \mu_{\binom{n}{k}\binom{n}{k}} \end{vmatrix},$$

determinante de los menores de orden k del determinante D. Introduzcamos además el determinante $\overline{\Delta}_k$ del orden $\binom{n}{k}$ que se obtiene de Δ_k, sustituyendo cada menor μ_{ij} por su cofactor α_{ij} en D.

Demostrar que:

1) los valores de los determinantes Δ_k y $\overline{\Delta}_k$ no varían, al cambiar la numeración de las combinaciones, o sea, al permutar las combinaciones en una sucesión de $s_1, s_2, \dots, s_{\binom{n}{k}}$;

2) $\Delta_k = \overline{\Delta}_{n-k}$, lo que es la generalización de la afirmación del problema 242;

3) $\Delta_k\overline{\Delta}_k = D^{\binom{n}{k}}$; 4) $\Delta_k = D^{\binom{n-1}{k-1}}$; 5) $\overline{\Delta}_k = D^{\binom{n-1}{k}}$.

552*. Calcular el determinante $P_n = | p_{ij} |$, en el cual $p_{ij} = 1$ si i divide j, y $p_{ij} = 0$ si i no divide j. Hallar el valor del determinante $Q_n = | q_{ij} |$ en el cual q_{ij} es igual al número de los divisores comunes de i y j.

553*. La función $\varphi(n)$ igual a la cantidad de números de la serie $1, 2, \dots, n$, primos con n se denomina *función de Euler*. Haciendo uso del problema anterior y del teorema de Gauss de que $n = \sum \varphi(d)$, donde la suma se toma por todos los divisores de d del número n (incluyendo 1 y el propio n), mostrar que el determinante de orden n $D = | d_{ij} |$, donde d_{ij} es el máximo común divisor de los números i y j, es igual a $\varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n)$.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

§ 9. Sistemas de ecuaciones resueltos según la regla de Cramer

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando la regla de Cramer:

554. $2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4,$
$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6,$
$8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12,$
$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6.$

555. $2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2,$
$x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1,$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3.$

556. $2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20,$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11,$
$2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40,$
$3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37.$

557. $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0,$
$6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0.$

558. $7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 = 0,$
$2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0,$
$5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0.$

559. $6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0.$
$9x - y + 4z - t - 13 = 0,$
$3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0,$
$3x - 9y + 2t - 11 = 0.$

560. $2x - y - 6z + 3t + 1 = 0,$
$7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0,$
$x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0,$
$x - y + 2z - 6t + 8 = 0.$

561. $2x + y + 4z + 8t = -1,$
$x + 3y - 6z + 2t = 3,$
$3x - 2y + 2z - 2t = 8,$
$2x - y + 2z = 4.$

562. $2x - y + 3z = 9,$
$3x - 5y + z = -4,$
$4x - 7y + z = 5.$

563. $2x - 5y + 3z + t = 5,$
$3x - 7y + 3z - t = -1,$
$5x - 9y + 6z + 4t = 7,$
$4x - 6y + 3z + t = 8.$

564*. Dos sistemas de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas (no es obligatorio que tengan el mismo número de ecuaciones) se denominan equivalentes si cualquier solución del primer sistema satisface el segundo y viceversa. (Cualesquiera dos sistemas con las mismas incógnitas, cada uno de los cuales, no tiene soluciones, también se consideran equivalentes).

Mostrar que cualquiera de las siguientes transformaciones del sistema de ecuaciones lineales:

a) permutación de dos ecuaciones;

b) multiplicación de ambos miembros de una de las ecuaciones por cualquier número diferente de cero;

c) resta término a término de una ecuación, multiplicada por cualquier número, de la otra convierte dicho sistema de ecuaciones en uno equivalente.

¿Transformará el cambio de numeración de las incógnitas el sistema dado en el equivalente? ¿Es admisible el cambio de numeración de las incógnitas al resolver el sistema de ecuaciones?

565. Demostrar que cualquier sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{1}$$

mediante las transformaciones tipo a), b), c) del problema anterior y el cambio de numeración de las incógnitas, puede reducirse a la siguiente forma

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_j = d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{2}$$

que satisface uno y sólo uno de los siguientes tres grupos de condiciones:

a) $c_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad c_{ij} = 0$ para $i > j$

(en particular, los coeficientes de las incógnitas en todas las ecuaciones que siguen la n-ésima (siendo $s > n$) son nulos), $d_i = 0$ para $i = n + 1, \ldots, s$ (en ese caso se dice que el sistema se reduce al aspecto triangular);

b) existe un número entero r, $0 \leqslant r \leqslant n - 1$, tal que $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$; $c_{ij} = 0$ para $i > j$; $c_{ij} = 0$ para $i > r$ y cualquier j, igual a $1, 2, \ldots, n$; $d_i = 0$ para $i = r + 1, r + 2, \ldots, s$;

c) existe un número entero r, $0 \leqslant r \leqslant n$, tal que $c_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, r$; $c_{ij} = 0$ para $i > j$; $c_{ij} = 0$ para $i > r$ y cualquier $j = 1, 2, \ldots, n$. Existe un número entero k, $r + 1 \leqslant k \leqslant s$, tal que $d_k \neq 0$.

Mostrar que si en el sistema (2) se reconstituye la numeración precedente de las incógnitas, se obtiene el sistema equivalente al inicial (1). Luego mostrar que en el caso a) el sistema (2) (así como el (1) también) tiene la única solución; en el caso b) el sistema (2) tiene una cantidad infinita de soluciones con la particularidad de que para cualesquiera valores de las incógnitas $y_{r+1}, \ldots, y_n$ existe el único sistema de valores de las demás incógnitas $y_1, \ldots, y_r$; en el caso c) el sistema (2) no tiene resolución alguna. Este teorema argumenta el método de eliminación de las incógnitas al resolver el sistema de ecuaciones lineales.

566. Mostrar que si el sistema de ecuaciones lineales (1) del problema anterior posee coeficientes enteros, entonces para todas las transformaciones, reduciéndolo al aspecto (2), pueden evitarse los números fraccionarios, de modo que el sistema (2) también tendrá coeficientes enteros.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de eliminación de las incógnitas:

567.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 3,\\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= -3,\\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 &= -3,\\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 22. \end{aligned}$$

568.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 &= 0,\\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

569.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 &= 0,\\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

570.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6,\\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2,\\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6,\\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7. \end{aligned}$$

571.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 &= 0,\\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 &= 0,\\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 &= 0,\\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

572.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 79,\\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 &= 263,\\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 &= 146,\\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 &= 92. \end{aligned}$$

573.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 35,\\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 &= 70,\\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 &= 126,\\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 &= 210. \end{aligned}$$

574.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 2,\\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 &= 12,\\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 &= 17,\\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 &= 57,\\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 &= 7. \end{aligned}$$

575*.
$$\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 18x_4 + 20x_5 &= 14,\\ 10x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 24x_4 + 30x_5 &= 18,\\ 12x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 27x_4 + 35x_5 &= 32,\\ 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 15x_4 + 20x_5 &= 16,\\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 15x_4 + 15x_5 &= 11. \end{aligned}$$

576.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 9 &= 0,\\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 + 146 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 + 10 &= 0,\\ x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 + 26 &= 0,\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 - 37 &= 0. \end{aligned}$$

577.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 14x_4 &= 21,\\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 13x_4 + 3x_5 &= 12,\\ 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - x_5 &= 29,\\ 15x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 9x_4 + 7x_5 &= 130,\\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= -13. \end{aligned}$$

578.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5,\\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3,\\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1,\\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12. \end{aligned}$$

579.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1,\\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 3,\\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3,\\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 &= 3. \end{aligned}$$

580.
$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8,\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7,\\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 &= 6,\\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 &= 1. \end{aligned}$$

581.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3,\\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2,\\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1,\\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5. \end{aligned}$$

582. Mostrar que el polinomio de grado n se determina completamente por sus valores para valores $n+1$ de la indeterminada. Con más precisión, mostrar que para cualesquiera números $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, que se difieren entre sí, y cualesquiera números $y_0, y_1, \ldots, y_n$ existe uno y sólo un polinomio $f(x)$ de grado $\leqslant n$, para el cual

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

583. Usando el problema anterior, demostrar la equivalencia de las dos definiciones de la igualdad de los polinomios de una indeterminada [1]) con coeficientes numéricos (o coeficientes de cualquier cuerpo conmutativo infinito):

1) dos polinomios se llaman iguales si son iguales sus coeficientes de cada par de términos del mismo grado (definición habitual aprobada en el álgebra);

[1]) Una afirmación análoga para los polinomios de cualquier número de indeterminadas es fácil demostrar mediante la inducción.

2) dos polinomios se denominan iguales si son iguales como funciones, es decir, si para cada valor de la indeterminada, sus valores son iguales (definición habitual aprobada en el análisis).

584. Mostrar que para un cuerpo conmutativo finito de coeficientes las definiciones del problema precedente no son equivalentes (dar un ejemplo).

585. Hallar el polinomio cuadrado $f(x)$, sabiendo que

$$f(1) = -1; \quad f(-1) = 9; \quad f(2) = -3.$$

586. Hallar el polinomio de tercer grado $f(x)$, para el cual

$$f(-1) = 0, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 16.$$

587. ¿Qué sentido geométrico tiene la afirmación del problema 582?

588. Hallar la parábola de tercer grado que pasa a través de los puntos (0, 1), (1, —1), (2, 5), (3, 37), con la particularidad de que la dirección asintótica es paralela al eje de ordenadas.

589. Hallar la parábola de cuarto grado que pasa a través de los puntos (5, 0), (—13, 2), (—10, 3), (—2, 1), (14, —1), con la particularidad de que la dirección asintótica es paralela al eje de las abscisas.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, aplicando en cada caso el procedimiento más adecuado:

590.
$$\begin{aligned} -x + y + z + t &= a, \\ x - y + z + t &= b, \\ x + y - z + t &= c, \\ x + y + z - t &= d. \end{aligned}$$

591*.
$$\begin{aligned} a(x+t) + b(y+z) &= c, \\ a'(y+t) + b'(z+x) &= c', \\ a''(z+t) + b''(x+y) &= c'', \\ x + y + z + t &= d, \end{aligned}$$

con la particularidad de que

$$a \neq b, \; a' \neq b', \; a'' \neq b''.$$

592*.
$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &= p, \\ -bx + ay + dz - ct &= q, \\ -cx - dy + az + bt &= r, \\ -dx + cy - bz + at &= s. \end{aligned}$$

593*.
$$\begin{aligned} x_n + a_1x_{n-1} + a_1^2x_{n-2} + \ldots + a_1^{n-1}x_1 + a_1^n &= 0, \\ x_n + a_2x_{n-1} + a_2^2x_{n-2} + \ldots + a_2^{n-1}x_1 + a_2^n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n + a_nx_{n-1} + a_n^2x_{n-2} + \ldots + a_n^{n-1}x_1 + a_n^n &= 0, \end{aligned}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son distintos números.

594.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n &= b, \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n &= b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n &= b^{n-1}, \end{aligned}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son diferentes números.

595. $x_1 + a_1x_2 + \ldots + a_1^{n-1}x_n = b_1,$
$x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_2^{n-1}x_n = b_2,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x_1 + a_nx_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b_n,$
donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son distintos números.

596. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b_1,$
$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_2,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b_n,$
donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son distintos números.

597. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1 = 0,$
$2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^nx_n + 1 = 0,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$nx_1 + n^2x_2 + \ldots + n^nx_n + 1 = 0.$

598. $ax_1 + bx_2 + \ldots + bx_n = c_1,$
$bx_1 + ax_2 + \ldots + bx_n = c_2,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$bx_1 + bx_2 + \ldots + ax_n = c_n,$
donde $(a - b)[a + (n-1)b] \neq 0.$

599*. $(3 + 2a_1)x_1 + (3 + 2a_2)x_2 + \ldots + (3 + 2a_n)x_n = 3 + 2b,$

$$(1 + 3a_1 + 2a_1^2)x_1 + (1 + 3a_2 + 2a_2^2)x_2 + \ldots + (1 + 3a_n + 2a_n^2)x_n = 1 + 3b + 2b^2,$$

$$a_1(1 + 3a_1 + 2a_1^2)x_1 + a_2(1 + 3a_2 + 2a_2^2)x_2 + \ldots + a_n(1 + 3a_n + 2a_n^2)x_n = b(1 + 3b + 2b^2),$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$a_1^{n-3}(1 + 3a_1 + 2a_1^2)x_1 + a_2^{n-3}(1 + 3a_2 + 2a_2^2)x_2 + \ldots + a_n^{n-3}(1 + 3a_n + 2a_n^2)x_n = b^{n-3}(1 + 3b + 2b^2),$$

$$a_1^{n-2}(1 + 3a_1)x_1 + a_2^{n-2}(1 + 3a_1)x_2 + \ldots + a_n^{n-2}(1 + 3a_n)x_n = b^{n-2}(1 + 3b).$$

600*. Desarrollando la función $\frac{x}{\ln(1+x)}$ en serie de potencias, obtenemos $\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + \ldots$

Mostrar que

$$h_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

601. Se sabe que $\frac{1}{\cos x}=1+\frac{e_1}{2!}x^2+\frac{e_2}{4!}x^4+\frac{e_3}{6!}x^6+\dots$, donde e_1, e_2, e_3, ... son los denominados números de Euler. Mostrar que

$$e_n=(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

602*. En el desarrollo $\frac{x}{e^x-1}=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$, $b_{2n}=$ $=\frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}$, donde B_n son los denominados números de Bernoulli.

Mostrar que

$$B_n=(-1)^{n+1}(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

Prosiguiendo, mostrar que para $n > 1$

$$b_{2n-1}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}=0.$$

603*. Mostrar que el número de Bernoulli B_n, introducido en el problema anterior, puede expresarse mediante los siguientes determinantes de orden n:

$$B_n=\frac{1}{2}(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-5)!} & \dots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix},$$

o

$$B_n=2^n(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}.$$

604*. Designemos por $s_n(k)$ la suma de las n-ésimas potencias de los números de la serie natural desde 1 hasta $k-1$, es decir, $s_n(k)=1^n+2^n+\dots+(k-1)^n$. Después de establecer la igualdad $k^n=1+C_n^{n-1}s_{n-1}(k)+C_n^{n-2}s_{n-2}(k)+\dots+C_n^1 s_1(k)+s_0(k)$, demostrar que

$$s_{n-1}(k)=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} k^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \dots & C_n^1 & 1 \\ k^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ k^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k^2 & 0 & 0 & \dots & C_2^1 & 1 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

605*. Representar en forma de un determinante el n-ésimo coeficiente l_n del desarrollo $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + l_1x^2 + l_2x^4 + \ldots + l_nx^{2n} + \ldots$

606. Representar en forma de un determinante el n-ésimo coeficiente f_n del desarrollo $x \operatorname{ctg} x = 1 - f_1x^2 - f_2x^4 - \ldots - f_nx^{2n} - \ldots$

607*. Después de expresar el n-ésimo coeficiente a_n del desarrollo $e^{-x} = 1 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots$ en forma de un determinante, hallar de aquí el valor del determinante.

§ 10. Rango de una matriz. Dependencia lineal de los vectores y de las formas lineales

Hallar el rango de las siguientes matrices, aplicando el método de rebordear los menores:

608. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. **609.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

610. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **611.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

612. Hallar los valores de λ, para los cuales la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene el rango mínimo.

¿Cuál será el rango para los λ hallados y cuál será para otros valores de λ?

613. ¿Cuál será el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

para distintos valores de λ?

614. Sean A la matriz de rango r y M_k el menor de orden k que se encuentra en el ángulo superior izquierdo de la matriz A. Demostrar que mediante las permutaciones de las filas entre sí y las columnas entre sí puede lograrse el cumplimiento de las condiciones: $M_1 \neq 0$, $M_2 \neq 0$, $\ldots$, $M_r \neq 0$, mientras que todos los menores del orden superior a r (si, en general, éstos existen) son nulos.

615. Las siguientes *transformaciones de una matriz*:

1) multiplicación de una fila (columna) por un número, distinto de cero;

2) adición de una fila (columna), multiplicada por cualquier número, a otra fila (columna);

3) permutación de dos filas (columnas)

se denominan *elementales*.

Demostrar que las transformaciones elementales no varían el rango de la matriz.

616. Demostrar que la permutación de las filas (columnas) de una matriz puede obtenerse, haciendo las transformaciones de las filas y columnas sólo de los tipos 1) y 2), indicados en el problema anterior.

617. Demostrar que cualquier matriz de rango r puede reducirse, mediante las transformaciones elementales indicadas en el problema 615, a una forma en que los elementos $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{rr} = 1$, y los demás son nulos.

618. Demostrar que mediante las transformaciones elementales sólo de las filas o sólo de las columnas, la matriz cuadrada puede reducirse a la forma «triangular», en la que todos los elementos por un lado de la diagonal principal son nulos, con la particularidad de que los ceros pueden obtenerse, según el deseo, bien por encima de la diagonal principal, bien por abajo de ésta.

Calcular el rango de las siguientes matrices con ayuda de las transformaciones elementales:

619. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$. **620.** $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

621. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

622. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

623. Demostrar que si la matriz está compuesta de m filas y su rango es r, cualesquiera s de sus filas forman una matriz, cuyo rango no es inferior a $r + s - m$.

624. Demostrar que agregando una fila (o una columna) a la matriz, el rango de ésta bien no varía, o bien aumenta en una unidad.

625. Demostrar que el borrado de una fila (o una columna) de la matriz no varía su rango cuando, y sólo cuando, la fila borrada (o columna) se expresa linealmente a través de las demás filas (columnas).

626. Se denomina *suma de dos matrices* que tienen la misma cantidad de filas y columnas, una matriz, cada elemento de la cual es

igual a la suma de los correspondientes elementos de dichas matrices, es decir, $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Demostrar que el rango de la suma de dos matrices no supera la suma de sus rangos.

627. Demostrar que cualquier matriz de rango r puede representarse en forma de una suma de r matrices de rango 1, pero no se puede representar en forma de una suma inferior a r de semejantes matrices.

628. Demostrar que si el rango de la matriz A no varía, al agregarle cada una de las columnas de la matriz B con la misma cantidad de filas, no varía tampoco al agregarle a la matriz A todas las columnas de la matriz B.

629*. Demostrar que si el rango de la matriz A es igual a r, el menor d que se encuentra en la intersección de cualesquiera r filas linealmente independientes y r columnas linealmente independientes de esta matriz, es distinto de cero.

630*. Sean A una matriz cuadrada de orden $n > 1$ y $\hat{A}$ una matriz, recíproca (asociada) de la matriz A. Aclarar cómo varía el rango $\hat{r}$ de la matriz $\hat{A}$ al cambiar el rango r de la matriz A.

631*. Demostrar que el cálculo del rango de una matriz simétrica se reduce al cómputo sólo de los menores principales, o sea, de los menores que se hallan en las filas y columnas con números respectivamente iguales. Demostrar precisamente que:

1) si en la matriz simétrica A de orden n existe el menor principal M_r de orden r, diferente de cero, para el cual todos sus menores principales rebordeantes de órdenes $(r + 1)$ y $(r + 2)$ son nulos, entonces el rango de la matriz A es igual a r (si todos los menores principales son nulos, puede considerarse que el menor principal de orden cero M_0 es igual a la unidad y el teorema queda siendo válida; para $r = n - 1$ no existen menores de orden $r + 2$, pero la afirmación del teorema es justa ya que el rango de A es igual a $n - 1$);

2) el rango de la matriz simétrica es igual al orden superior de los menores principales, distintos de cero, de dicha matriz.

632*. Sean A una matriz simétrica de rango r y M_k el menor de orden k que se encuentra en el ángulo superior izquierdo de la matriz A. (Consideramos que para $k = 0$ $M_0 = 1$). Demostrar que, aplicando cierta permutación de filas y la correspondiente permutación de columnas de la matriz A, puede lograrse que en la serie de menores $M_0 = 1, M_1, M_2, \ldots, M_r$ ningunos dos vecinos sean nulos y $M_r \neq 0$, mientras que todos los menores de orden superior a r (si éstos existen) son iguales a cero.

633*. Demostrar que el rango de una matriz antisimétrica se determina por sus menores principales. A saber:

1) si existe un menor principal de orden r, distinto de cero, para el cual todos los menores principales que lo rebordean del orden $r + 2$ son nulos, el rango de la matriz es igual a r;

2) el rango de una matriz antisimétrica es igual al orden superior de los menores principales, distintos de cero, de dicha matriz.

634*. Sean A una matriz antisimétrica de rango r y M_k un menor de orden k, situado en el ángulo superior izquierdo de la matriz A ($M_0 = 1$). Demostrar que, aplicando cierta permutación de filas y la correspondiente permutación de columnas de la matriz A, puede lograrse que los menores $M_0, M_2, M_4, \ldots, M_r$ sean distintos de cero y los menores $M_1, M_3, \ldots, M_{r-1}$ y todos los menores de orden superior a r (si éstos existen) son nulos.

635. Demostrar que el rango de una matriz antisimétrica es un número par.

636. Hallar la combinación lineal $3a_1 + 5a_2 - a_3$ de los vectores

$a_1 = (4, 1, 3, -2)$, $a_2 = (1, 2, -3, 2)$, $a_3 = (16, 9, 1, -3)$.

637. Hallar el vector x de la ecuación

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = 0,$$

donde

$$a_1 = (5, -8, -1, 2), \quad a_2 = (2, -1, 4, -3),$$
$$a_3 = (-3, 2, -5, 4).$$

638. Hallar el vector x de la ecuación

$$3(a_1 - x) + 2(a_2 + x) = 5(a_3 + x),$$

donde

$$a_1 = (2, 5, 1, 3), \quad a_2 = (10, 1, 5, 10), \quad a_3 = (4, 1, -1, 1).$$

Aclarar si los siguientes sistemas de vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes:

639. $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, 6, 7)$.

640. $a_1 = (4, -2, 6)$, $a_2 = (6, -3, 9)$.

641. $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$.

642. $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$.

643. $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, -2, 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$, $a_4 = (4, -1, 5, 6)$.

644. $a_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $a_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $a_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $a_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

645. Si de las coordenadas de cada vector del sistema dado de vectores de un mismo número de mediciones elegimos las coordenadas, situadas en lugares determinados (los mismos para todos los vectores), conservando su orden, obtendremos el segundo sistema de vectores que se denominará *acortado* con relación al primer sistema. Mientras que este último se denominará *extendido* con relación al segundo. Demostrar que cualquier sistema acortado para un sistema de vectores linealmente dependiente es linealmente dependiente, y cualquier sistema extendido para un sistema de vectores linealmente independiente es linealmente independiente.

646. Demostrar que un sistema de vectores que contiene dos vectores iguales es linealmente dependiente.

647. Demostrar que un sistema de vectores, cuyos dos vectores se diferencian por un factor escalar es linealmente dependiente.

648. Demostrar que el sistema de vectores que contiene vector nulo es linealmente dependiente.

649. Demostrar que si una parte del sistema de vectores es linealmente dependiente, todo el sistema también es linealmente dependiente.

650. Demostrar que cualquier parte de un sistema de vectores linealmente independiente es por sí misma linealmente independiente.

651*. Supongamos que se da un sistema de vectores

$$\boldsymbol{a}_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n}) \quad (i = 1, 2, \ldots, s;\ s \leqslant n).$$

Demostrar que si $|\alpha_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} |\alpha_{ij}|$, dicho sistema de vectores es linealmente independiente.

652. Demostrar que si los tres vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ son linealmente dependientes y el vector $\boldsymbol{a}_3$ no se expresa linealmente a través de los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$, estos últimos se diferencian entre sí sólo por un factor numérico.

653. Demostrar que si los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ son linealmente independientes, y los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}$ son linealmente dependientes, el vector $\boldsymbol{b}$ se expresa linealmente a través de los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

654. Usando el problema anterior, demostrar que cada uno de los vectores de dicho sistema se expresa linealmente mediante cualquier subsistema linealmente independiente de ese sistema, subsistema que contiene una cantidad máxima de vectores.

655. Demostrar que un sistema ordenado de vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, distintos de cero, es linealmente independiente cuando y sólo cuando ninguno de esos vectores se expresa linealmente mediante los precedentes.

656*. Demostrar que si delante de un sistema ordenado de vectores linealmente independiente $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ se pone un vector más $\boldsymbol{b}$, entonces no más de un vector del sistema obtenido se expresará linealmente por medio de los anteriores.

657*. Demostrar que si los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ son linealmente independientes y se expresan linealmente a través de los vectores $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s$, entonces $r \leqslant s$.

658*. Se denomina *base del sistema de vectores dado* un subsistema que posee las siguientes propiedades:

1) este subsistema es linealmente independiente;

2) cualquier vector de todo el sistema se expresa linealmente mediante los vectores de este subsistema.

Demostrar que:

a) todas las bases de dicho sistema contienen la misma cantidad de vectores;

b) el número de vectores de cualquier base es el número máximo de vectores linealmente independientes del sistema dado; este número se denomina rango de dicho sistema;

c) si dicho sistema de vectores posee el rango r, cualesquiera r vectores linealmente independientes forman la base de este sistema.

659*. Demostrar que cualquier subsistema linealmente independiente del sistema dado puede completarse hasta la base de ese sistema.

660. Dos sistemas de vectores se denominan *equivalentes* si cada uno de los vectores de un sistema se expresa linealmente a través de los vectores del otro y viceversa. Demostrar que dos equivalentes sistemas linealmente independientes contienen la misma cantidad de vectores.

661. Demostrar que si los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ se expresan linealmente a través de los vectores $b_1, b_2, \ldots, b_l$, el rango del primer sistema no supera el del segundo.

662. Se dan los vectores:

$$a_1 = (0, 1, 0, 2, 0), \quad a_2 = (7, 4, 1, 8, 3),$$
$$a_3 = (0, 3, 0, 4, 0), \quad a_4 = (1, 9, 5, 7, 1),$$
$$a_5 = (0, 1, 0, 5, 0).$$

¿Es posible elegir los números c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, 5)$ de modo que los vectores

$$b_1 = c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3 + c_{14}a_4 + c_{15}a_5,$$
$$b_2 = c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_3 + c_{24}a_4 + c_{25}a_5,$$
$$b_3 = c_{31}a_1 + c_{32}a_2 + c_{33}a_3 + c_{34}a_4 + c_{35}a_5,$$
$$b_4 = c_{41}a_1 + c_{42}a_2 + c_{43}a_3 + c_{44}a_4 + c_{45}a_5,$$
$$b_5 = c_{51}a_1 + c_{52}a_2 + c_{53}a_3 + c_{54}a_4 + c_{55}a_5$$

sean linealmente independientes?

663. Demostrar que si, y sólo si, el vector b se expresa linealmente mediante los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$, el rango del último sistema de vectores no varía, añadiéndole el vector b.

664*. Demostrar que:

1) dos sistemas equivalentes de vectores tienen el mismo rango;

2) el teorema inverso a la afirmación 1) es incorrecto.

Sin embargo, es válida la afirmación:

3) si dos sistemas de vectores tienen el mismo rango y uno de ellos se expresa linealmente a través del otro, esos sistemas son equivalentes.

Hallar todos los valores de λ, para los cuales el vector b se expresa linealmente mediante los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_s$:

665. $a_1 = (2, \ 3, \ 5)$, $a_2 = (3, \ 7, \ 8)$, $a_3 = (1, \ -6, \ 1)$, $b = (7, \ -2, \ \lambda)$.

666. $a_1 = (4, \ 4, \ 3)$, $a_2 = (7, \ 2, \ 1)$, $a_3 = (4, \ 1, \ 6)$, $b = (5, \ 9, \ \lambda)$.

667. $a_1 = (3, \ 4, \ 2)$, $a_2 = (6, \ 8, \ 7)$, $b = (9, \ 12, \ \lambda)$.

668. $a_1 = (3, \ 2, \ 5)$, $a_2 = (2, \ 4, \ 7)$, $a_3 = (5, \ 6, \ \lambda)$, $b = (1, \ 3, \ 5)$.

669. $a_1 = (3, \ 2, \ 6)$, $a_2 = (7, \ 3, \ 9)$, $a_3 = (5, \ 1, \ 3)$, $b = (\lambda, \ 2, \ 5)$.

670. Explicar las respuestas de los problemas 665—669 desde el punto de vista de la disposición de dichos vectores en el espacio.

671. Utilizando el problema 657, demostrar que más de n vectores n-dimensionales siempre son linealmente dependientes.

672. Hallar todos los subsistemas máximos, linealmente independientes, del sistema de vectores:

$$a_1 = (4, \ -1, \ 3, \ -2), \quad a_2 = (8, \ -2, \ 6, \ -4),$$
$$a_3 = (3, \ -1, \ 4, \ -2), \quad a_4 = (6, \ -2, \ 8, \ -4).$$

Hallar todas las bases de los sistemas de vectores:

673. $a_1 = (1, \ 2, \ 0, \ 0)$, $a_2 = (1, \ 2, \ 3, \ 4)$, $a_3 = (3, \ 6, \ 0, \ 0)$.

674. $a_1 = (1, \ 2, \ 3, \ 4)$, $a_2 = (2, \ 3, \ 4, \ 5)$, $a_3 = (3, \ 4, \ 5, \ 6)$, $a_4 = (4, \ 5, \ 6, \ 7)$.

675. $a_1 = (2, \ 1, \ -3, \ 1)$, $a_2 = (4, \ 2, \ -6, \ 2)$, $a_3 = (6, \ 3, \ -9, \ 3)$, $a_4 = (1, \ 1, \ 1, \ 1)$.

676. $a_1 = (1, \ 2, \ 3)$, $a_2 = (2, \ 3, \ 4)$, $a_3 = (3, \ 2, \ 3)$, $a_4 = (4, \ 3, \ 4)$, $a_5 = (1, \ 1, \ 1)$.

677. ¿En qué caso el sistema de vectores posee base única?

678. ¿Cuántas bases tiene el sistema de $k + 1$ vectores de rango k que contiene vectores proporcionales, distintos de cero?

Hallar alguna base del sistema de vectores y expresar todos los vectores del sistema que no entran en dicha base, mediante los vectores de la base:

679. $a_1 = (5, \ 2, \ -3, \ 1)$, $a_2 = (4, \ 1, \ -2, \ 3)$, $a_3 = (1, \ 1, \ -1, \ -2)$, $a_4 = (3, \ 4, \ -1, \ 2)$.

680. $a_1 = (2, \ -1, \ 3, \ 5)$, $a_2 = (4, \ -3, \ 1, \ 3)$, $a_3 = (3, \ -2, \ 3, \ 4)$, $a_4 = (4, \ -1, \ 15, \ 17)$, $a_5 = (7, \ -6, \ -7, \ 0)$.

681. $a_1 = (1, \ 2, \ 3, \ -4)$,
$a_2 = (2, \ 3, \ -4, \ 1)$,
$a_3 = (2, \ -5, \ 8, \ -3)$,
$a_4 = (5, \ 26, \ -9, \ -12)$,
$a_5 = (3, \ -4, \ 1, \ 2)$.

682*. Supongamos que se da un sistema de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de una misma cantidad de dimensiones. Se denomina sistema principal de relaciones lineales de dicho sistema de vectores el sistema de relaciones tipo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

que posee estas dos propiedades:

a) ese sistema de relaciones es linealmente independiente, lo que significa la independencia lineal del sistema de vectores

$$a_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n}) \quad (i = 1, 2, \ldots, s);$$

b) cualquier dependencia lineal de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una consecuencia de las relaciones del sistema dado, es decir, si $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, el vector $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es una combinación lineal de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Demostrar que:

1) si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ es la base de dicho sistema de vectores y $x_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{i,j} x_j$, $i = r+1, r+2, \ldots, n$, entonces uno de los sistemas principales de las relaciones lineales del sistema dado de vectores será el sistema de relaciones $x_i - \sum_{j=1}^{r} \lambda_{i,j} x_j = 0$ $(i = r+1, r+2, \ldots, n)$;

2) todos los sistemas principales de relaciones lineales contienen el mismo número de relaciones;

3) si cierto sistema principal de relaciones lineales tiene s relaciones, cualquier sistema de s relaciones lineales linealmente independientes del mismo sistema de vectores es también un sistema principal de relaciones lineales;

4) si el sistema de relaciones $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ es un sistema principal de relaciones lineales entonces el sistema de relaciones $\sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_j = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ será un sistema principal de relaciones lineales cuando, y sólo cuando, suponiendo que $a_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $b_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, tenemos

$$b_i = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{i,j} a_j \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

donde los coeficientes $\gamma_{i,j}$ forman un determinante de orden s, distinto de cero.

Usando la multiplicación de las matrices, las últimas s igualdades vectoriales pueden escribirse en forma de una igualdad matricial

$$B = CA, \text{ donde } A = (\alpha_{i,j})_{s,n}, \quad B = (\beta_{i,j})_{s,n} \text{ y } C = (\gamma_{i,j})_s.$$

C es una matriz regular de orden s.

Después de determinar el sistema principal de relaciones lineales para los sistemas de formas lineales como fue hecho en el problema 682 para el sistema de vectores, hallar el sistema principal de relaciones lineales para el sistema de formas lineales:

683. $f_1 = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4,$
$f_2 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4,$
$f_3 = 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4,$
$f_4 = x_1 + 7x_3 + 11x_4.$

684. $f_1 = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4,$
$f_2 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4,$
$f_3 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4,$
$f_4 = x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4,$
$f_5 = 5x_2 + 4x_3 - 17x_4.$

685. $f_1 = 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$
$f_2 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5,$
$f_3 = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5,$
$f_4 = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5.$

686. $f_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4,$
$f_2 = x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 8x_4,$
$f_3 = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4,$
$f_4 = 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 7x_4,$
$f_5 = 6x_1 - 7x_2 - x_4.$

687. $f_1 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5,$
$f_2 = 6x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 8x_5,$
$f_3 = 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5,$
$f_4 = 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 5x_5,$
$f_5 = 8x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 + 2x_5.$

688*. Supongamos que se da un sistema de formas lineales

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \qquad (1)$$

y el segundo sistema de formas lineales que dependen linealmente de las formas del primer sistema

$$\varphi_j = \sum_{j=1}^{s} c_{ij}f_j \quad (i = 1, 2, \ldots, t). \qquad (2)$$

Demostrar que el rango del sistema de formas (2) no supera el del sistema de formas (1). Si $s = t$ y el determinante $|c_{ij}|_s$ difiere de cero, los rangos de ambos sistemas de formas lineales coinciden.

§ 11. Sistemas de ecuaciones lineales

Investigar la compatibilidad y hallar la solución general y una particular del sistema de ecuaciones:

689. $2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$
$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4,$
$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2.$

690. $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1,$
$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2,$
$2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1.$

691. $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7,$
$9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13.$

692. $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2,$
$7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5,$
$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3.$

693. $2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8,$
$4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9,$
$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7,$
$x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12.$

694. $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2,$
$6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3,$
$9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4.$

695. $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5,$
$6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7,$
$4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18.$

696. $9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4,$
$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5,$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8.$

697. $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2,$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3,$
$9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7.$

698. $x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2,$
$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2.$

699.
$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2,\\
6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3,\\
6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9.\\
4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1.
\end{aligned}
$$

700.
$$
\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 1,\\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3,\\
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad &= -7,\\
9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 2.
\end{aligned}
$$

701.
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 4,\\
3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= 5,\\
x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 &= 11,\\
2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 6.
\end{aligned}
$$

702.
$$
\begin{aligned}
6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &\quad 5,\\
4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 4,\\
4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0,\\
2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1,
\end{aligned}
$$

703.
$$
\begin{aligned}
8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 21,\\
3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10,\\
4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8,\\
3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 15,\\
7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 18.
\end{aligned}
$$

704.
$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4,\\
4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 5,\\
5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2,\\
2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\
x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 &= 7.
\end{aligned}
$$

705*. Demostrar que:

a) cualquier sistema de s ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya matriz formada de los coeficientes de las incógnitas posee el rango r, puede reducirse, cambiando la numeración de las ecuaciones e incógnitas, al aspecto:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{1}$$

que posee las propiedades

$$m_0 = 1, \quad m_1 \neq 0, \quad m_2 \neq 0, \ \ldots, \ m_r \neq 0, \tag{2}$$

donde m_k es el menor de orden k que se encuentra en el ángulo superior izquierdo de la matriz formada de los coeficientes de las incógnitas del sistema (1);

b) el sistema de ecuaciones (1) que posee las propiedades (2), mediante una serie de restas de sus ecuaciones, multiplicadas por números adecuados, de las posteriores ecuaciones, puede reducirse a un

sistema equivalente

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = d_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{3}$$

que posee las propiedades:

$$\left.\begin{array}{ll} c_{ii} \neq 0 & \text{para } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r, \\ c_{ij} = 0 & \text{para } j < i \leqslant r, \text{ así como} \\ & \text{para } i > r \text{ y } j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Si para $i = r + 1,\ r + 2,\ \ldots,\ s$ $d_i = 0$, los sistemas (3) y (1) son compatibles, con la particularidad de que, siendo $r = n$, existe una solución única, y para $r < n$ hay una cantidad infinita de soluciones.

En el último caso las incógnitas independientes son $x_{r+1}, \ldots, x_n$. De la r-ésima ecuación x_r puede expresarse mediante las incógnitas independientes. Después de poner esa fórmula en la $(r-1)$-ésima ecuación, hallaremos x_{r-1} a través de las incógnitas independientes, etc.

Por fin, mediante las incógnitas independientes hallaremos la expresión de x_1 a partir de la primera ecuación.

Las fórmulas obtenidas de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ mediante las incógnitas independientes $x_{r+1}, \ldots, x_n$ representan en sí la solución general de los sistemas (3) y (1). Esto significa que para cualesquiera valores de las incógnitas independientes obtendremos de las expresiones halladas las soluciones de los sistemas (3) y (1) y toda solución de estos sistemas puede obtenerse precisamente por este procedimiento para los valores adecuados de las incógnitas independientes.

Si $d_i \neq 0$ aunque sea sólo para un valor de $i > r$, los sistemas (3) y (1) son incompatibles.

El método expuesto de investigación y resolución de un sistema de ecuaciones lineales lleva el nombre de método de eliminación de las incógnitas (compárese con el problema 565).

Haciendo uso del método de eliminación de las incógnitas, indicado en el problema 705, investigar la compatibilidad y hallar la solución general de los sistemas de ecuaciones (si el sistema inicial tiene coeficientes enteros, durante la eliminación de las incógnitas pueden evitarse las fracciones):

706.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20. \end{aligned}$$

707.
$$\begin{aligned} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 &= 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 &= 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 &= 4. \end{aligned}$$

708.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 &= 25,\\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 &= 40,\\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 &= 65,\\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 &= 95. \end{aligned}$$

709.
$$\begin{aligned} 45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 &= 9,\\ 36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 &= 3,\\ 35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 &= 16,\\ 47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 &= -17,\\ 27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 &= 6. \end{aligned}$$

710.
$$\begin{aligned} 12x_2 - 16x_3 + 25x_4 &= 29,\\ 27x_1 + 24x_2 - 32x_3 + 47x_4 &= 55,\\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 &= 115,\\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 &= 50. \end{aligned}$$

711.
$$\begin{aligned} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 &= 28,\\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 &= 43,\\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 &= 58,\\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 &= 69. \end{aligned}$$

Investigar el sistema y hallar la solución general en función del valor del parámetro λ:

712.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3,\\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1,\\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9,\\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda. \end{aligned}$$

713.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 3,\\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 5,\\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 &= -11,\\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 &= 2. \end{aligned}$$

714.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2,\\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 4,\\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 &= 4,\\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 &= 7. \end{aligned}$$

715.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5,\\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7,\\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9,\\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11. \end{aligned}$$

716.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3,\\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5,\\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7,\\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 &= 9. \end{aligned}$$

717.
$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1. \end{aligned}$$

718. $$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1. \end{aligned}$$

719. $$\begin{aligned} (1+\lambda) x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + (1+\lambda) x_2 + x_3 &= \lambda,\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda) x_3 &= \lambda^2. \end{aligned}$$

720. $$\begin{aligned} (\lambda+1) x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda^2 + 3\lambda,\\ x_1 + (\lambda+1) x_2 + x_3 &= \lambda^3 + 3\lambda^2,\\ x_1 + x_2 + (\lambda+1) x_3 &= \lambda^4 + 3\lambda^3. \end{aligned}$$

Investigar los sistemas de ecuaciones y hallar la solución general en función de los valores de los parámetros que figuran en los coeficientes:

721. $$\begin{aligned} x + y + z &= 1,\\ ax + by + cz &= d,\\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2. \end{aligned}$$

722. $$\begin{aligned} ax + y + z &= 1,\\ x + by + z &= 1,\\ x + y + cz &= 1. \end{aligned}$$

¿En qué caso pueden existir aquí valores nulos de algunas de las incógnitas?

723*. $$\begin{aligned} ax + y + z &= a,\\ x + by + z &= b,\\ x + y + cz &= c. \end{aligned}$$

Hallar la solución general y el sistema fundamental (o el principal) de soluciones para los sistemas de ecuaciones:

724. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0,\\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned}$$

725. $$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0,\\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0,\\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

726. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0,\\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0,\\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0,\\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 &= 0. \end{aligned}$$

727. $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0,\\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0,\\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0,\\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned}$$

728. $$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0,\\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 0,\\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

729. $x_1 - x_3 = 0,$
$x_2 - x_4 = 0,$
$-x_1 + x_3 - x_5 = 0,$
$-x_2 + x_4 - x_6 = 0,$
$-x_3 + x_5 = 0,$
$-x_4 + x_6 = 0.$

730. $x_1 - x_3 + x_5 = 0,$
$x_2 - x_4 + x_6 = 0,$
$x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0,$
$x_2 - x_3 + x_6 = 0,$
$x_1 - x_4 + x_5 = 0.$

731. $5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0,$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0,$
$7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0,$
$5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0.$

732. $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0,$
$5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0,$
$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0,$
$7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0.$

733. Demostrar que para cualquier sistema homogéneo de ecuaciones lineales de coeficientes racionales (por ejemplo, enteros) puede construirse un sistema fundamental de números enteros de soluciones (a condición de que el rango de la matriz de los coeficientes es inferior al número de las incógnitas).

734. Demostrar que para el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \qquad (1)$$

de rango $r < n$ cualesquiera $n - r$ soluciones linealmente independientes

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n},$$
$$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n},$$
$$\alpha_{n-r,1}, \alpha_{n-r,2}, \ldots, \alpha_{n-r,n}$$

forman un sistema fundamental de soluciones y la solución general puede representarse en la siguiente forma

$$x_j = \sum_{k=1}^{n-r} c_k \alpha_{kj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ son parámetros arbitrarios. En otras palabras, demostrar que para cualesquiera valores de los parámetros $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ las fórmulas (2) dan la solución del sistema (1) y cualquier solución del sistema (1) puede obtenerse de las fórmulas (2), siendo adecuados los valores de los parámetros $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$.

Para los siguientes sistemas de ecuaciones hallar la solución general tipo (2) del problema anterior, en el que cada incógnita se da mediante una expresión lineal homogénea de los parámetros con coeficientes enteros:

735. $2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0,$
$4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0.$

736. $2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0,$
$4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0,$
$2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0.$

737. $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0,$
$6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0,$
$6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0.$

738. $6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0,$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0,$
$6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0,$
$9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0.$

739. $2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0,$
$4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0,$
$x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0.$

740. $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0,$
$9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0,$
$3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0,$
$6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0.$

741. ¿Forman las filas de cada una de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

un sistema fundamental de soluciones para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 &= 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 0? \end{aligned}$$

742. ¿Cuáles filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

forman un sistema fundamental de soluciones para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0? \end{aligned}$$

743*. Demostrar que si en la solución general de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales de rango r con n incógnitas, donde $r < n$,

en lugar de las incógnitas independientes se ponen por turno los números de cada fila de un determinante de orden $n - r$, diferente de cero, y hallar los correspondientes valores de las demás incógnitas, se obtiene un sistema fundamental de soluciones, y viceversa, cualquier sistema fundamental de soluciones de dicho sistema de ecuaciones puede obtenerse, eligiendo adecuadamente el determinante de orden $n - r$, distinto de cero.

744. Sean las filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

que forman un sistema fundamental de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales de rango r con n incógnitas ($n = r + p$). Demostrar que las filas de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \dots & \beta_{pn} \end{pmatrix}$$

forman también un sistema fundamental de soluciones del mismo sistema de ecuaciones cuando, y sólo cuando, existe una matriz regular de orden p

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \dots & \gamma_{pp} \end{pmatrix}$$

tal que

$$\beta_{ik} = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{ij}\alpha_{jk} \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ p,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Haciendo uso de la multiplicación matricial, estas igualdades pueden escribirse mediante una: $B = CA$.

745. Mostrar que el problema 743 es un caso particular del problema 744.

746. Demostrar que si el rango de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es inferior en una unidad a la cantidad de incógnitas, cualesquiera dos soluciones de ese sistema son proporcionales, es decir, se diferencian sólo por un factor numérico (que puede ser igual a cero).

747. Usando la teoría de los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales, resolver el problema 509, es decir, demostrar que si el determinante D de orden $n > 1$ es nulo, los cofactores de los elementos correspondientes de cualesquiera dos filas (columnas) son proporcionales.

748*. Demostrar que si en un sistema homogéneo de ecuaciones lineales el número de ecuaciones es inferior en una unidad a la can-

tidad de incógnitas, puede tomarse como solución un sistema de menores, obtenidos de la matriz de coeficientes, borrando por turno la primera columna, segunda, etc., con la particularidad de que esos menores se cogen con signos alternativos.

Prosiguiendo, mostrar que si esta solución no es nula, cualquier solución se obtiene de ella, multiplicándola por cierto número.

Haciendo uso del resultado anterior, hallar las soluciones general y particular de los sistemas de ecuaciones:

749. $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0,$
$6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0.$

750. $4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0,$
$6x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 0.$

751. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0.$

752. $8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0,$
$4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0,$
$12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0.$

753. Demostrar que para que el sistema de ecuaciones lineales con el número de ecuaciones que supera en una unidad la cantidad de incógnitas sea compatible, es necesario (pero no es suficiente) que el determinante compuesto de todos los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes sea nulo. Mostrar que esta condición será también suficiente si el rango de la matriz, formada de los coeficientes, es igual al número de las incógnitas.

754. Supóngamos que se dan: un sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

dos soluciones de este sistema $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ y un número λ. Hallar el sistema de ecuaciones lineales con los mismos coeficientes de las incógnitas, que el sistema dado, que tenga la solución en forma de

a) una suma de soluciones dadas:

$$\alpha_1 + \beta_1, \quad \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n,$$

ó

b) un producto de la primera de las soluciones por el número λ:

$$\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n.$$

755. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que bien la suma de dos soluciones, o bien el producto de una de ellas por el número $\lambda \neq 1$ sea de nuevo la solución del mismo sistema de ecuaciones lineales.

756. ¿Para qué condiciones la combinación lineal dada de cualesquiera soluciones del sistema no homogéneo dado de ecuaciones lineales será de nuevo la solución de ese sistema?

757. ¿Qué valores pueden tomar las incógnitas en cualesquiera soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales si las columnas de los coeficientes de las incógnitas, a excepción de la primera, así como la columna de los términos independientes se diferencian de dos en dos sólo por los factores numéricos?

758. ¿Para qué condiciones la incógnita x_k tiene un mismo valor en cualquier solución de un sistema compatible de ecuaciones lineales?

759. Hallar las condiciones, necesarias y suficientes para que en cualquier solución de un sistema compatible de ecuaciones lineales la k-ésima incógnita sea nula.

760. ¿Para que condiciones en la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y + az + bt &= 0,\\ -x + cz + dt &= 0,\\ ax + cy - et &= 0,\\ bx + dy + ez &= 0 \end{aligned}$$

z y t pueden tomarse por incógnitas independientes?

761. ¿Cuántas condiciones, independientes entre sí, deben cumplirse para que el sistema de s ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible y contenga r ecuaciones independientes para las cuales las demás ecuaciones sean su resultado?

762. ¿Para qué condiciones el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= by + cz + du + ev,\\ y &= cz + du + ev + ax,\\ z &= du + ev + ax + by,\\ u &= ev + ax + by + cz,\\ v &= ax + by + cz + du \end{aligned}$$

tiene solución no nula?

763*. ¿Para qué condiciones el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales

$$\begin{aligned} \lambda x + ay + bz + ct &= 0,\\ -ax + \lambda y + hz - gt &= 0,\\ -bx - hy + \lambda z + ft &= 0,\\ -cx + gy - fz + \lambda t &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución no nula?

Aplicando la teoría de las ecuaciones lineales, resolver los siguientes problemas (se examinan sólo los sistemas cartesianos rectangulares de coordenadas):

764. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que los tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) se encuentren en una misma recta.

765. Escribir la ecuación de una recta que pase a través de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

766. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que las tres rectas

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

atraviesen un mismo punto.

767. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que n puntos del plano (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n) se encuentren en una recta.

768. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que n rectas en el plano

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_nx + b_ny + c_n = 0$$

pasen a través de un mismo punto.

769. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que los cuatro planos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) que no yacen en una misma recta, se encuentren en una misma circunferencia.

770. Escribir la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) que no yacen en una misma recta.

771. Escribir la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos (1, 2), (1, —2), (0, —1) y hallar su centro y radio.

772*. Demostrar que la circunferencia que pasa por tres puntos con coordenadas racionales, tiene su centro en un punto también con coordenadas racionales.

773. Escribir la ecuación de una curva de segundo orden que atraviesa cinco puntos:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ (x_4, y_4),\ (x_5, y_5).$$

774. Hallar la ecuación y definir la forma de la curva de segundo orden que pasa por cinco puntos:

$$(3, 0),\ (-3, 0),\ \left(5,\ 6\frac{2}{3}\right),\ \left(5,\ -6\frac{2}{3}\right),\ \left(-5,\ -6\frac{2}{3}\right).$$

775. Escribir la ecuación y definir la posición y las dimensiones de la curva de segundo orden que atraviesa cinco puntos:

$$(0, 1),\ (\pm 2, 0),\ (\pm 1, -1).$$

776. Hallar la condición necesaria y suficiente para que los cuatro puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) y (x_4, y_4, z_4) estén en un mismo plano.

777. Escribir la ecuación de un plano que atraviesa tres puntos

$$(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 3,\ -1),\ (3,\ -1,\ -1).$$

778. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que los cuatro planos

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0,$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

pasen por un mismo punto.

779. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que n planos $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pasen por una misma línea, sin unirse en un plano.

780. Escribir la ecuación de una esfera que pasa por cuatro puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) que no están en un mismo plano.

781. Escribir la ecuación y hallar el centro y el radio de la esfera que pasa por los puntos: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 0, 0)$.

782. ¿Qué sistema de ecuaciones lineales prefija tres diversas rectas en un plano que pasan a través de un punto?

783. ¿Qué sistema de ecuaciones lineales prefija tres rectas en el plano que forman un triángulo?

784. ¿Qué sistema de ecuaciones lineales prefija tres planos del espacio que no poseen puntos comunes pero se intersecan de dos en dos?

785. ¿Qué sistema de ecuaciones lineales prefija cuatro planos en el espacio que forman un tetraedro?

786. Señalar la interpretación geométrica de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas en el cual los rangos de todas las matrices, formadas de los coeficientes de las incógnitas de las tres ecuaciones y el rango de la matriz ampliada son iguales a tres?

787. Examinar todos los casos posibles que se encuentran al resolver los sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, y en cada caso dar la interpretación geométrica de dicho sistema de ecuaciones.

MATRICES Y FORMAS CUADRÁTICAS

§ 12. Operaciones con las matrices

Calcular los productos de las matrices:

788. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **789.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

790. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **791.** $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

792. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

793. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

794. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

795. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$.

796. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

797. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

798. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Calcular las expresiones:

799. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$. **800.** $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$.

801. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$. **802.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

803. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k$

donde los ceros significan que todos los elementos de la matriz que se encuentran fuera de la diagonal principal son nulos.

804. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.   805. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

806. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^3$ 807. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$,

(el orden de dicha matriz es igual a n).

808. Calcular $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$, utilizando la igualdad

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

809. Calcular $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$, utilizando la igualdad

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

810. Demostrar que si para las matrices A y B ambos productos AB y BA existen con la particularidad de que $AB = BA$, las matrices A y B son cuadradas y tienen el mismo orden.

811. ¿Cómo cambia el producto AB de las matrices A y B si:

a) se permutan las i-ésima y j-ésima filas de la matriz A?

b) a la i-ésima fila de la matriz A se le añade la j-ésima fila multiplicada por el número c?

c) se permutan las i-ésima y j-ésima columnas de la matriz B?

d) a la i-ésima columna de la matriz B se le añade la j-ésima columna multiplicada por el número c?

812. Haciendo uso del problema anterior y de la constancia del rango durante las transformaciones elementales (véase el problema 615), demostrar que el rango del producto de dos matrices no supera el rango de cada uno de los factores.

813. Demostrar que el rango del producto de varias matrices no supera el rango de cada una de las matrices que se multiplican.

814. Se denomina «huella» de una matriz cuadrada la suma de elementos que están en la diagonal principal. Demostrar que la huella de AB es igual a la de BA.

815. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas de un mismo orden con la particularidad de que $AB \neq BA$, entonces:

a) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
b) $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

816. Demostrar que si $AB = BA$, entonces

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} A^{n-2}B^2 + \ldots + B^n.$$

Aquí A y B son matrices cuadradas del mismo orden.

817. Demostrar que cualquier matriz cuadrada A puede representarse, sólo de un modo único, en forma de $A = B + C$, donde B es una matriz simétrica y C, antisimétrica.

818. Las matrices A y B se denominan *conmutativas* si $AB = BA$. La matriz cuadrada A se llama *escalar* si todos sus elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal, son nulos, y los elementos de la diagonal principal son iguales entre sí, o sea, si $A = cE$, donde c es un número y E es la matriz unidad. Demostrar la afirmación: para que la matriz cuadrada A sea conmutativa con todas las matrices cuadradas del mismo orden, es necesario y suficiente que la matriz A sea escalar.

819. La matriz cuadrada se denomina diagonal si todos sus elementos que están fuera de la diagonal principal son nulos. Demostrar la afirmación: para que la matriz cuadrada A sea conmutativa con todas las matrices diagonales es necesario y suficiente que la propia matriz A sea diagonal.

820. Demostrar que si A es una matriz diagonal y todos los elementos de su diagonal principal se diferencian entre sí, cualquier matriz, conmutativa con A, también es diagonal.

821. Demostrar que al multiplicar la matriz A a la izquierda por una matriz diagonal $B = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, se origina la multiplicación de las filas de A por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, y al multiplicar a la derecha A por B, se origina una variación análoga de las columnas.

Hallar todas las matrices, conmutativas con la matriz:

822. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **823.** $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. **824.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

825. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

826. Hallar todos los números c que, al multiplicar la matriz regular A por los mismos, no cambian su determinante.

827. Hallar el valor del polinomio $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

828. Hallar el valor del polinomio $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

829. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisface la ecuación

$$x^2 - (a + d)\,x + ad - bc = 0.$$

830*. Demostrar que para cualquier matriz cuadrada A existe un polinomio $f(x)$, distinto de cero y tal que $f(A) = 0$, con la particularidad de que todo polinomio de este tipo se divide por uno de ellos que se determina unívocamente por la condición de que su coeficiente mayor es igual a la unidad (éste se denomina polinomio mínimo de la matriz A).

831*. Demostrar que la igualdad $AB - BA = E$ no se cumple para ninguna de las semejantes matrices A y B.

832. Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyo cuadrado es igual a la matriz nula.

833*. Sean A una matriz de segundo orden y k un número entero superior a dos. Demostrar que $A^k = 0$ si, y sólo si, $A^2 = 0$.

834. Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz unidad.

835. Investigar la ecuación $AX = 0$, donde A es la matriz dada de segundo orden y X es la buscada del mismo orden.

Hallar las matrices inversas para las siguientes matrices:

836. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 837. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. 838. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

839. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. 840. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

841. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. 842. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. 843. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

844. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 845. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

846. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. 847. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

848. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

849. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$

(el orden de la matriz es $n+1$).

850. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

851. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$.

852. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

853. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

854. $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a \end{pmatrix}$

(el orden de la matriz es igual a n).

855. $\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}$.

856. Mostrar que el cálculo de la matriz inversa de la dada de orden n puede reducirse a la solución de n sistemas de ecuaciones lineales, cada uno de los cuales contiene n ecuaciones con n incógnitas y en calidad de la matriz de los coeficientes de las incógnitas tiene la matriz A.

Utilizando el método del problema 856, hallar las matrices inversas para las siguientes matrices:

857. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

858*. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$.

859. $\begin{pmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a+(n-1)h & a \end{pmatrix}$.

860*. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$
donde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$.

Resolver las ecuaciones matriciales:

861. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **862.** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

863. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

864. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

865. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

866. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

867. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. **868.** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

869. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **870.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

871. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

872. ¿Cómo varía la matriz inversa A^{-1} si en la matriz A dada:
a) se permutan la i-ésima y j-ésima filas?
b) la i-ésima fila se multiplica por el número c, distinto de cero?
c) a la i-ésima fila se le añade la j-ésima, multiplicada por el número c o se efectúa una transformación análoga de las columnas?

873. Una matriz cuadrada de números enteros se denomina *unimodular* si su determinante es igual a ± 1. Demostrar que la matriz de números enteros tiene una matriz inversa de números enteros cuando, y sólo cuando, la matriz dada es unimodular.

874. Demostrar que la ecuación matricial $AX = B$ es resoluble si, y sólo si, el rango de la matriz A es igual al de la matriz (A, B) que se obtiene de A, añadiendole a la derecha la matriz B.

875. Mostrar que la ecuación matricial $AX = 0$, donde A es una matriz cuadrada, tiene la solución no nula cuando, y sólo cuando, $|A| = 0$.

876. Sean A y B matrices regulares de un mismo orden. Mostrar que las cuatro igualdades:

$$AB = BA, \quad AB^{-1} = B^{-1}A, \quad A^{-1}B = BA^{-1},$$
$$A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

son equivalentes entre sí.

877. Sean A una matriz cuadrada y $f(x)$ y $g(x)$ cualesquiera polinomios. Mostrar que las matrices $f(A)$ y $g(A)$ son conmutativas, o sea, $f(A)\, g(A) = g(A)\, f(A)$.

878. Sean A una matriz cuadrada y $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ una función racional con respecto a x. Mostrar que el valor $r(A)$ de la función $r(x)$ para $x = A$ se determina unívocamente si, y sólo si, $|g(A)| \neq 0$.

879. Hallar la matriz A^{-1}, inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} E_k & U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$, donde E_k y E_l son matrices unidades de órdenes k y l, respectivamente, U es una matriz (k, l) arbitraria (o sea, una matriz de k filas y l columnas), mientras que todos los demás elementos son nulos.

880. Se denomina k-ésima *serie antisimétrica de orden* n la matriz cuadrada $H_k = (h_{ij})$ de orden n, cuyos elementos se determinan mediante las igualdades

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ para } j - i = k, & (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1)). \\ 0 \text{ para } j - i \neq k \end{cases}$$

Mostrar que $H_1^k = H_k$, $H_{-1}^k = H_{-k}$, si $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $H_1^k = H_{-1}^k = 0$, si $k \geqslant n$.

881. ¿Cómo varía la matriz A al multiplicarla a la izquierda o a la derecha por la matriz H_1 o H_{-1} del problema anterior?

882. Mostrar que la operación de transponer una matriz posee las propiedades:

$$\text{a) } (A + B)' = A' + B'; \quad \text{b) } (AB)' = B'A';$$
$$\text{c) } (cA)' = cA'; \quad \text{d) } (A^{-1})' = (A')^{-1},$$

donde c es un número y A y B son matrices.

883. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas simétricas del mismo orden, la matriz $C = ABAB \ldots ABA$ es simétrica.

884. Mostrar que:

a) una matriz inversa de una simétrica regular es simétrica;

b) una matriz inversa de una antisimétrica regular es antisimétrica.

885. Mostrar que para cualquier matriz B la matriz $A = BB'$ es simétrica.

886. Sea $A^* = \overline{A}'$ la matriz obtenida de A, transponiéndola y sustituyendo todos los elementos por números complejos conjugados.

Mostrar que:

a) $(A+B)^* = A^* + B^*$; b) $(AB)^* = B^*A^*$;

c) $(cA)^* = \bar{c}A^*$; d) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,

donde c es un número y A y B son matrices, sobre las cuales se efectúa la correspondiente operación.

887. La matriz A se denomina *hermitiana* si $A^* = A$. Mostrar que para cualquier matriz B con elementos reales o complejos la matriz $A = B \cdot B^*$ es hermitiana.

888. Mostrar que el producto de dos matrices simétricas será una matriz simétrica cuando, y sólo cuando, dichas matrices son conmutativas.

889. Mostrar que el producto de dos matrices antisimétricas será una matriz simétrica si, y sólo si, las matrices dadas son conmutativas.

890*. Demostrar que el producto de dos matrices antisimétricas A y B será una matriz antisimétrica cuando, y sólo cuando, $AB = -BA$.

Citar algunos ejemplos de matrices antisimétricas que satisfacen la condición $AB = -BA$.

891. La matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n se denomina *ortogonal* si $AA' = E$, donde E es una matriz unidad. Mostrar que para que la matriz cuadrada A sea ortogonal es necesario y suficiente cualquiera de las siguientes condiciones:

a) las columnas de A forman un sistema ortonormalizado, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker que significa 1 para $i = j$ y 0 para $i \neq j$;

b) las filas de A forman un sistema ortonormalizado, o sea,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.$$

892. La matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n con elementos complejos o reales se denomina *unitaria* si $AA^* = E$ (el sentido de la designación de A^* es el mismo que en el problema 886). Mostrar que para que la matriz cuadrada A sea unitaria es necesario y suficiente cualquiera de las siguientes condiciones:

a) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} = \delta_{ij}$,

b) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{jk} = \delta_{ij}$

(δ_{ij} es el símbolo de Kronecker).

893. Demostrar que el determinante de una matriz ortogonal es igual a ± 1.

894. Demostrar que el determinante de una matriz unitaria es igual, según el módulo, a la unidad.

895. Demostrar que si la matriz ortogonal A tiene en la diagonal principal células cuadradas $A_1, A_2, \ldots, A_s$ y ceros por un lado de esas célula, entonces todos los elementos por otro lado de ellas también son nulos y todas las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_s$ son ortogonales.

896. Demostrar que para que la matriz cuadrada A sea ortogonal es necesario y suficiente que su determinante sea igual a ± 1 y cada uno de sus elementos sea igual a su cofactor, tomado con su signo si $|A| = 1$ y con el signo opuesto, si $|A| = -1$.

897*. Demostrar que la matriz cuadrada real A de orden $n \geqslant 3$ será ortogonal si cada uno de sus elementos es igual a su cofactor y por lo menos uno de sus elementos es distinto de cero.

898*. Demostrar que la matriz cuadrada real A de orden $n \geqslant 3$ será ortogonal si cada uno de sus elementos es igual a su cofactor tomado con signo opuesto, y por lo menos uno de sus elementos se diferencia de cero.

899*. Demostrar que la suma de los cuadrados de todos los menores de segundo orden que yacen en dos filas (o columnas) de una matriz ortogonal, es igual a la unidad.

900*. Demostrar que la suma de los cuadrados de los módulos de todos los menores de segundo orden que yacen en dos filas (o columnas) de una matriz unitaria, es igual a la unidad.

901*. Demostrar que la suma de los cuadrados de todos los menores de orden k que yacen en cualesquiera k filas (columnas) de una matriz ortogonal, es igual a la unidad.

902*. Demostrar que la suma de los cuadrados de los módulos de todos los menores de orden k que yacen en cualesquiera k filas (columnas) de una matriz unitaria, es igual a la unidad.

903*. Demostrar que un menor de cualquier orden de una matriz ortogonal A es igual a su cofactor tomado con su signo si $|A| = 1$ y con signo opuesto si $|A| = -1$.

904*. Sean A una matriz unitaria, M su menor de cualquier orden, M_A el cofactor del menor M en la matriz A. Demostrar que $M_A = |A| \cdot \overline{M}$, donde $\overline{M}$ es un número conjugado con M.

905. ¿En qué condiciones la matriz diagonal será ortogonal?

906. ¿En qué condiciones la matriz diagonal será unitaria?

907. Comprobar que cualquiera de las tres propiedades de la matriz cuadrada: la de ser real, ortogonal y unitaria, se desprenden de las otras dos.

908. Una matriz cuadrada I se denomina involutiva si $I^2 = E$. Mostrar que cada una de las tres propiedades de la matriz cuadrada: la de ser simétrica, ortogonal e involutiva, se desprende de las otras dos.

909. Comprobar que las matrices

a) $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

poseen todas las tres propiedades del problema anterior.

910. La matriz cuadrada P se denomina *idempotente* si $P^2 = P$. Mostrar que si P es idempotente, $I = 2P - E$ es involutiva, y viceversa, si I es involutiva, $P = {}^1/_2\,(I + E)$ es idempotente.

911. Demostrar que:

a) el producto de dos matrices ortogonales será una matriz ortogonal;

b) la matriz inversa de la matriz ortogonal es ortogonal.

912. Demostrar que:

a) el producto de dos matrices unitarias será una matriz unitaria;

b) una matriz, inversa de la matriz unitaria, es unitaria.

913*. Al menor de la matriz A el cual se encuentra en la intersección de las filas con números $i_1, i_2, \ldots, i_p$ y las columnas con números $j_1, j_2, \ldots, j_p$ lo designaremos por $A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_p \\ j_1, j_2, \ldots, j_p \end{pmatrix}$.

Demostrar la validez de la siguiente expresión de los menores del producto $C = AB$ de dos matrices mediante los menores de las matrices que se multiplican:

$$C\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix}$$

$$(i_1 < i_2 < \ldots < i_p;\ j_1 < j_2 < \ldots < j_p),$$

si p no supera ni la cantidad de columnas de la matriz A, ni la cantidad de filas de la matriz B. En caso contrario, todos los menores de orden p de la matriz C son nulos.

914. Utilizando el problema anterior demostrar que el rango del producto de dos matrices no supera el rango de cada uno de los factores.

915*. Demostrar que al multiplicar la matriz A a la izquierda o a la derecha por una matriz regular, su rango no varía.

916. El menor que está en la intersección de las filas y columnas con los mismos números se denomina menor principal de la matriz A. Mostrar que si todos los elementos de la matriz B son reales, todos los menores principales de $A = BB'$ son no negativos.

917. Mostrar que para cualquier matriz B con elementos reales o complejos todos los menores principales de la matriz $A = BB^*$ son no negativos. Aquí $B^* = \overline{B}'$.

918. Mostrar que si en las designaciones del problema anterior $A = BB^*$, el rango de A es igual al rango de B.

919. Demostrar que la suma de los menores principales de orden k de la matriz AA' es igual a la suma de los cuadrados de todos los menores de orden k de la matriz A.

920*. Demostrar que para cualesquiera matrices cuadradas A y B de orden n la suma de todos los menores principales de dicho orden k ($1 \leqslant k \leqslant n$) es igual para las matrices AB y BA.

921*. Sean A una matriz real de orden n, B y C las matrices de las primeras k columnas y las últimas $n-k$ de A. Demostrar que $|A^2| \leqslant |B'B| \cdot |C'C|$.

922*. Sea $A = (B, C)$ una matriz real (el sentido del símbolo (B, C) se da en el problema 874). Demostrar que $|A'A| \leqslant |B'B| \times |C'C|$.

923*. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada real de orden n. Demostrar la desigualdad de Hadamard:

$$|A|^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2.$$

924*. Demostrar que para cualquier matriz rectangular real $A = (a_{ij})$ de n filas y m columnas se cumple la desigualdad

$$|A'A| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2.$$

925*. Sea $A = (B, C)$ una matriz de elementos complejos. Demostrar que $|A^* \cdot A| \leqslant |B^* \cdot B| \cdot |C^* \cdot C|$.

926* Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n de elementos complejos que no superan, según el módulo, el número M. Demostrar que el módulo del determinante $|A|$ no supera $M^n \cdot n^{n/2}$, con la particularidad de que esta estimación es precisa.

927*. Mostrar que cada una de las transformaciones elementales de la matriz A, es decir, la transformación de uno de los siguientes tipos:

a) permutación de dos filas (columnas);

b) multiplicación de una fila (columna) por un número c diferente de cero;

c) adición de una fila (columna) multiplicada por cualquier número c, a otra fila (columna); puede obtenerse multiplicando la matriz A a la izquierda por cierta matriz singular P con el fin de transformar las filas, y a la derecha para transformar las columnas. Hallar el aspecto de esas matrices.

928*. Una matriz cuadrada se denomina *triangular* si todos sus elementos que están por un lado de la diagonal principal, son nulos. Mostrar que cualquier matriz cuadrada puede representarse en forma de un producto de varias matrices triangulares.

929* Mostrar que cualquier matriz A de rango r puede representarse en forma de un producto $A = PRQ$, donde P y Q son matrices regulares y R es una matriz rectangular de las mismas dimensiones que A, en cuya diagonal principal los primeros r elementos son igua-

les a la unidad, mientras que todos los demás elementos son nulos.

930*. Sean A una matriz de dimensiones $m \times n$ y de rango r, $P = (p_{ij})$ una matriz de dimensiones $s \times m$, en la cual $p_{11} = p_{22} = \ldots = p_{kk} = 1$, y todos los demás elementos son ceros, $Q = (q_{ij})$ una matriz de dimensiones $n \times t$, en la cual $q_{11} = q_{22} = \ldots = q_{ll} = 1$ y todos los demás elementos son ceros. Demostrar las desigualdades:

a) el rango de $PA \geqslant k + r - m$;

b) el rango de $AQ \geqslant l + r - n$;

c) el rango de $PAQ \geqslant k + l + r - m - n$.

931* Designemos el rango de la matriz A por r_A. Demostrar que para el rango del producto AB de dos matrices cuadradas A y B de orden n tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant r_A,\ r_B \text{ (desigualdad de Sylvester).}$$

932. Mostrar que para el rango del producto AB de las matrices rectangulares A y B tiene lugar la desigualdad de Sylvester del problema anterior a condición de que n significa el número de columnas de la matriz A y el número de filas de la matriz B.

933*. Mostrar que cualquier matriz regular A puede reducirse a una matriz unidad E mediante las transformaciones elementales sólo de las filas (o sólo de las columnas). Si las transformaciones elementales que se ejecutaron sobre A, se aplican en el mismo orden a la matriz unitaria E, obtendremos como resultado una matriz A^{-1}, inversa de A.

Utilizando el método del problema anterior, hallar las matrices inversas para las siguientes matrices (para comodidad de los cálculos, añadir a dicha matriz A a la derecha una matriz unidad y efectuar las transformaciones elementales de las filas que reducen A a E, sobre las filas de toda la matriz escrita):

934. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. **935.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. **936.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

937. Haciendo uso del método del problema 933, hallar las matrices inversas para las matrices de los problemas 844, 846, 848, 849, 850.

938*. Demostrar la afirmación:

Para que la matriz A de m filas y n columnas tenga el rango igual a la unidad, es necesario y suficiente que A se represente en forma de $A = BC$, donde B es una columna no nula de longitud m, C la fila no nula de longitud n.

939* Demostrar la afirmación:

Para que la matriz A de m filas y n columnas tenga el rango r, es necesario y suficiente que A se represente de la siguiente forma: $A = BC$, donde B es la matriz de m filas y r columnas linealmente

independientes y C, una matriz de r filas linealmente independientes y n columnas.

940. Mostrar que si A y B son matrices cuadradas de orden n y $AB = 0$, entonces $r_A + r_B \leqslant n$, con la particularidad de que para cualquier matriz dada A puede elegirse la matriz B de modo que sea $r_A + r_B = k$, donde k es cualquier número entero que satisface la condición $r_A \leqslant k \leqslant n$.

941*. Mostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n, para la cual $A^2 = E$, entonces $r_{E-A} + r_{E-A} = n$.

942. Dos matrices de números enteros se denominan equivalentes si de una de ellas se puede pasar a la otra mediante unas transformaciones elementales de números enteros, es decir, mediante transformaciones de los siguientes tipos:

a) permutación de dos filas;

b) multiplicación de una fila por -1;

c) adición de una fila multiplicada por un número entero c a otra, y transformaciones análogas para las columnas. Demostrar que las matrices A y B son equivalentes cuando, y sólo cuando, $B = PAQ$, donde P y Q son matrices unimodulares cuadradas de números enteros.

943*. Una matriz rectangular de números enteros A se denomina *normal* si sus elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ son positivos, a_{ii} se divide por $a_{i-1, i-1}$ $(i = 1, 3, \ldots, r)$ y los elementos restantes son nulos. Mostrar que cada matriz de números enteros es equivalente a una, y sólo a una, matriz normal; en otras palabras, cada clase de matrices de números enteros, equivalentes entre sí, tiene una matriz normal y, además, sólo una.

944*. Demostrar que cada matriz regular de números enteros A puede representarse en forma de $A = PR$, donde P es una matriz unimodular de números enteros y R, una matriz triangular de números enteros, cuyos elementos en la diagonal principal son positivos, más abajo de ésta son nulos y más arriba de ella son no negativos y menores que los elementos de la diagonal principal de la misma columna, con la particularidad de que dicha representación es única.

945*. Demostrar que la matriz cuadrada A de orden n y rango r puede representarse en forma de $A = PR$, donde P es una matriz regular y R, una matriz triangular, en la cual los primeros r elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad y todos los elementos que se hallan más abajo de la diagonal principal y todos los elementos de las últimas $n - r$ filas son nulos.

946*. Una matriz cuadrada se denomina *superior* (*inferior*) triangular si todos sus elementos que se encuentran más abajo (respectivamente, más arriba) de la diagonal principal, son nulos. Mostrar que las siguientes operaciones: adición de dos matrices, multiplicación de una matriz por un número, multiplicación de dos matrices y paso a la matriz inversa para una matriz regular, aplicadas a las matrices superiores (inferiores) triangulares conducen de nuevo a una matriz superior (inferior) triangular.

947. Una matriz cuadrada se denomina *nilpotente* si algún grado de ella es igual a cero. El mínimo número positivo entero k, para el cual $A^k = 0$, se denomina *índice del carácter nilpotente de la matriz* A. Mostrar que la matriz triangular es nilpotente si, y sólo si, todos los elementos de la diagonal principal son nulos, y el índice del carácter nilpotente de la matriz triangular no supera su orden.

948. Mostrar que la matriz inversa $B = (b_{ik})$ para una matriz regular triangular superior (inferior) $A = (a_{ik})$ de orden n será de nuevo una matriz triangular superior (inferior), con la particularidad de que los elementos de la diagonal principal de la matriz B se determinan mediante las igualdades: $b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y los demás elementos se encuentran de las relaciones recurrentes:

a) para los elementos de la i-ésima fila de la matriz triangular superior

$$b_{ik} = \frac{-\sum_{j=i}^{k-1} b_{ij}a_{jk}}{a_{kk}} \quad (k = i+1, i+2, \ldots, n);$$

b) para los elementos de la k-ésima columna de la matriz triangular inferior

$$b_{ik} = \frac{-\sum_{j=k}^{i-1} a_{ij}b_{jk}}{a_{ii}} \quad (i = k+1, k+2, \ldots, n).$$

Es cómodo utilizar estas fórmulas para calcular las matrices inversas de las triangulares.

949*. Sea A una matriz cuadrada de orden n y rango r con la particularidad de que

$$d_k = A\begin{pmatrix}1, 2, \ldots, k\\ 1, 2, \ldots, k\end{pmatrix} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{1}$$

Demostrar que para estas condiciones la matriz A puede representarse en forma de un producto

$$A = BC, \tag{2}$$

donde $B = (b_{ij})$ es una matriz triangular inferior y $C = (c_{ij})$, una matriz triangular superior (la definición de las matrices triangulares inferior y superior se ha dado en el problema 946).

A los primeros r elementos diagonales de las matrices B y C se les puede dar cualesquiera valores que satisfacen las condiciones

$$b_{kk}c_{kk} = \frac{d_k}{d_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, r;\ d_0 = 1). \tag{3}$$

Dados los primeros r elementos diagonales de las matrices B y C se determinan unívocamente los demás elementos de las primeras r columnas de la matriz B y las primeras r filas de la matriz C, con

la particularidad de que esos elementos se dan por las fórmulas

$$b_{ik}=b_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\end{pmatrix}}{d_k},$$
$$c_{ki}=c_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\end{pmatrix}}{d_k} \qquad (4)$$
$$(i=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

En caso de $r<n$ en las últimas $n-r$ columnas de la matriz B todos los elementos pueden tomarse iguales a cero y en las últimas $n-r$ filas de la matriz C los elementos pueden tomarse arbitrarios, o, viceversa, en las últimas $n-r$ columnas de la matriz B, considerarse arbitrarios y en las últimas $n-r$ filas de la matriz C todos los elementos pueden tomarse iguales a cero.

Los elementos arbitrarios no infringen la igualdad (2). Se les puede elegir de modo que se conserve el aspecto triangular de las matrices B y C.

950. Mostrar que la representación (2) del problema anterior puede hallarse del siguiente modo: los primeros r elementos en la diagonal principal de las matrices B y C se eligen de modo arbitrario pero deben satisfacer las condiciones (3) y los demás elementos de las primeras r columnas de B y las primeras r filas de C se calculan con ayuda de las relaciones recurrentes:

$$b_{ik}=\frac{a_{ik}-\sum_{j=1}^{k-1}b_{ij}c_{jk}}{c_{kk}} \quad (i=k+1,\ k+2,\ \ldots\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r);$$
$$c_{ik}=\frac{a_{ik}-\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}c_{jk}}{b_{ii}} \quad (k=i+1,\ i+2,\ \ldots,\ n;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Estas fórmulas permiten hallar al principio la primera columna de B y la primera fila de C, luego, en general, sabiendo las $k-1$ columnas de B y las $k-1$ filas de C, hallar la k-ésima columna de B y la k-ésima fila de C.

951*. Demostrar que cualquier matriz simétrica $A=(a_{ij})$ de orden n y rango r que satisface las condiciones (1) del problema 949, puede representarse en forma de $A=BB'$, donde B es la matriz triangular inferior, cuyos elementos de las últimas $n-r$ columnas son nulos, y los elementos de las primeras r columnas se determinan mediante las fórmulas

$$b_{ik}=\frac{A\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\end{pmatrix}}{\sqrt{d_k\cdot d_{k-1}}} \quad (i=k,\ k+1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

952. La matriz A se denomina *celular* (o *en bloques*) si sus elementos están distribuidos mediante una o varias líneas horizontales

y verticales por las células (bloques) rectangulares. Estas células las designaremos por A_{ij}, donde i es el número de la fila celular y j, el número de la columna celular. Mostrar que la multiplicación de dos matrices celulares se reduce a la multiplicación de las células, consideradas como elementos aislados, cuando, y sólo cuando, la división vertical de la primera matriz corresponde a la división horizontal de la segunda. A saber: si $A = (A_{ij})$ es una (m, n)-matriz con división de las filas en grupos según $m_1, m_2, \ldots, m_s$ y de las columnas según $n_1, n_2, \ldots, n_t$ y $B = (B_{ij})$ es una (n, p)-matriz con división de las filas en grupos según $n_1, n_2, \ldots, n_t$ y de las columnas en grupos según $p_1, p_2, \ldots, p_u$, entonces $AB = C = (C_{ij})$ será también una matriz celular, con la particularidad de que

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{t} A_{ij}B_{jk} \quad (i = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, u).$$

Haciendo uso de la regla señalada de la multiplicación de las matrices celulares, hallar las células del producto de las siguientes matrices para la subdivisión indicada en células para los factores:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ \hline 4 & -2 & 1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

953. Mostrar que para multiplicar dos matrices cuadradas celulares es suficiente (pero, como muestra el ejemplo del problema anterior, no es necesario) que las células diagonales sean cuadradas, con la particularidad de que los órdenes de las correspondientes células diagonales sean iguales entre sí.

954*. Mostrar que para realizar la multiplicación celular de una matriz celular por sí misma es necesario y suficiente que todas sus células diagonales sean cuadradas.

955. Una matriz celular cuadrada $A = (A_{ij})$ se denomina *triangular-celular* si todas sus células en la diagonal principal, o sea, $A_{11}, A_{22}, \ldots$, son cuadradas y todas las células que se encuentran por un lado de la diagonal principal son nulas. Mostrar que si A y B son dos matrices triangulares-celulares con los mismos órdenes de las correspondientes células diagonales y los ceros por un lado de la diagonal, su producto AB también será una matriz triangular-celular con los mismos órdenes de las células diagonales y los ceros por el mismo lado de la diagonal.

956. Mostrar que una matriz triangular-celular es nilpotente si, y sólo si, todas sus células en la diagonal principal son nilpotentes (la definición del carácter nilpotente se dio en el problema 947).

957. Sea $A = (A_{ij})$ una matriz celular con la particularidad de que A_{ij} es una célula de dimensiones $m_i \times n_j$ ($i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, t$). Mostrar que la adición de la j-ésima fila, multiplicada a la izquierda por una matriz rectangular X de dimensiones $m_i \times m_j$, a la i-ésima fila celular, puede obtenerse, multiplicando A

a la izquierda por una matriz celular cuadrada regular P. Así como la adición de la j-ésima columna, multiplicada a la derecha por una matriz rectangular Y de dimensiones $n_j \times n_i$, a la i-ésima columna celular, puede obtenerse multiplicando A a la derecha por una matriz celular cuadrada regular Q. Hallar la forma de las matrices P y Q.

958*. Sea $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ una matriz celular, donde A es una matriz cuadrada regular de orden n. Demostrar que el rango de R es igual a n cuando, y sólo cuando, $D = CA^{-1}B$.

959*. Sean A una matriz regular de orden n, B una matriz de dimensiones $n \times q$ y C una matriz de dimensiones $p \times n$. Demostrar que si la matriz celular $R = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}$ se reduce a la forma de $R_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, transformando de modo elemental las filas con la particularidad de que en cada transformación participan bien sólo las primeras n filas, o bien a cierta fila de un número superior a n se le añade una de las primeras n filas, multiplicada por un número, entonces $X = CA^{-1}B$.

960. Sean A una matriz regular de orden n y E una matriz unidad del mismo orden. Demostrar que si transformando elementalmente la matriz celular $\begin{pmatrix} A & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ (como se indicó en el problema anterior) se reduce a la forma $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, entonces $X = A^{-1}$. Hallar, aplicando este método, la matriz, inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

961. Supongamos que se da un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

con una matriz regular de coeficientes A, B es una columna de términos independientes y E es una matriz unidad de orden n.

Mostrar que si una matriz celular $\begin{pmatrix} A & B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ se reduce mediante las transformaciones indicadas en el problema 959 a la forma $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, la columna X nos da la solución del sistema de ecuaciones dado.

Resolver con ayuda de este método el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 7, \\ 4x - 3y + 2z &= 4, \\ 2x + y + 3z &= 13. \end{aligned}$$

962. Sean A una matriz regular de orden n, B una matriz de dimensiones $n \times p$ y E una matriz unidad de orden n. Mostrar que

si la matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ se reduce mediante las transformaciones, indicadas en el problema 959, a la forma $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, la matriz X da la solución de la ecuación matricial $AX = B$.

Aplicando este método, resolver la ecuación señalada si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

963*. Supongamos que todos los pares (i, j) $(i = 1, 2, \ldots, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ están numerados en un determinado orden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{mn}$. Una matriz $C = A \times B$ de orden mn, compuesta de todos los posibles productos de los elementos de las matrices A y B en orden adecuado se denomina producto *de Kronecker* (o *directo*) de dos matrices cuadradas A de orden m y B de orden n. A saber, el elemento de la matriz C que yace en la i-ésima fila y j-ésima columna, se define de este modo:

$$c_{ij} = a_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2}, \text{ donde } (i_1, i_2) = \alpha_i, \ (j_1, j_2) = \alpha_j.$$

Demostrar que:

a) $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$;

b) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$;

c) $(AB) \times (CD) = (A \times C)(B \times D)$.

964*. Se denomina *producto directo derecho* de las matrices cuadradas A de orden m y B de orden n, la matriz celular $A \times {}^{\cdot}B = C = (C_{ij})$, donde $C_{ij} = a_{ij}B$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. De modo análogo, se denomina producto directo izquierdo de las mismas matrices la matriz celular $A^{\cdot} \times B = D = (D_{ij})$, donde $D_{ij} = Ab_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Demostrar que:

a) los dos productos introducidos son casos particulares del producto de Kronecker, definido en el problema anterior. Hallar el orden de la numercaión de los pares (i, j) que da los productos directos izquierdo y derecho;

b) $A \times {}^{\cdot}B = B^{\cdot} \times A$;

c) $A \times {}^{\cdot}(B \times {}^{\cdot}C) = (A \times {}^{\cdot}B) \times {}^{\cdot}C$;

d) si E_k es una matriz unidad de orden k, $E_m \times {}^{\cdot}E_n = E_n \times {}^{\cdot}E_m = E_{mn}$;

e) si A y B son matrices regulares, $(A \times {}^{\cdot}B)^{-1} = A^{-1} \times {}^{\cdot}B^{-1}$.

Para el producto izquierdo son válidas las propiedades, análogas a c), d) y e).

965*. Haciendo uso de los dos problemas anteriores, demostrar que si A es una matriz de orden m y B, de orden n, entonces $|A \times B| = |A|^n \times |B|^m$ (véase el problema 540).

966*. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Se denomina matriz *recíproca* a A (o *adjunta* a A) la matriz $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$, donde

$\hat{a}_{ij} = A_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. En otras palabras, la matriz recíproca a A se obtiene, transponiendo una matriz compuesta de cofactores de los elementos de la matriz A.

Demostrar que:

a) $A\hat{A} = \hat{A}A = |A| E$, donde E es una matriz unidad;

b) $(\hat{\hat{A}}) = |A|^{n-2}A$ para $n > 2$, $(\hat{\hat{A}}) = A$ para $n = 2$.

967*. Mostrar que $\widehat{(AB)} = \hat{B}\cdot\hat{A}$, donde $\hat{A}$ es una matriz recíproca a A, determinada en el precedente problema.

968*. Se denomina **matriz** *asociada* a la matriz cuadrada A de orden n una matriz $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, donde $\hat{a}_{ij}$ es el menor del elemento a_{ij} de la matriz A. Demostrar que:

a) $\widetilde{(AB)} = \tilde{A}\tilde{B}$;

b) $(\tilde{\tilde{A}}) = A^{n-2}A$ para $n > 2$, $(\tilde{\tilde{A}}) = A$ para $n = 2$.

969*. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n y supongamos que todas las combinaciones de n números $1, 2, \ldots, n$ según p de los números $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$, están numeradas en cualquier orden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, donde $N = C_n^p$. La matriz $A_p = (a_{i,j;\,p})$ es la p-ésima matriz asociada a A compuesta de menores de orden p, situados en orden adecuado, a saber: $a_{i,j;\,p} = A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix}$, donde α_i es la combinación de $i_1 < i_2 \ldots i_p$; α_j, la combinación de $j_1 < j_2 \ldots < j_p$.

Demostrar que:

a) $(AB)_p = A_pB_p$;

b) $(E_n)_p = E_N$, donde E_n y E_N son matrices unidades de órdenes n y N respectivamente;

c) si A es una matriz regular, entonces $(A^{-1})_p = (A_p)^{-1}$.

970. Hallar una numeración de las combinaciones de n números $1, 2, \ldots, n$ según p que para una matriz triangular A la matriz asociada A_p, definida en el problema anterior, también sea triangular con ceros por el mismo lado de la diagonal.

971*. Aplicando las propiedades de las matrices asociadas, demostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $|A_p| = |A|^{C_{n-1}^{p-1}}$ (véase el problema 551).

972*. Sean A una matriz regular de orden n y $B = A^{-1}$ una matriz inversa de A. Demostrar que los menores de cualquier orden de una matriz inversa se expresan a través de los menores de la matriz inicial de la siguiente manera:

$$B\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{p}(i_s+k_s)} A\begin{pmatrix} k'_1, & k'_2, & \ldots, & k'_{n-p} \\ i'_1, & i'_2, & \ldots, & i'_{n-p} \end{pmatrix}}{|A|}, \qquad (1)$$

donde $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ junto con $i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{n-p}$ y $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ junto con $k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_{n-p}$ forman un sistema completo de índices 1, 2, ..., n.

973*. Demostrar que la p-ésima matriz asociada A_p (la definición se dio en el problema 969) para una matriz ortogonal A es ortogonal de por sí.

974*. Demostrar que la p-ésima matriz asociada A_p para una matriz unitaria A es unitaria de por sí.

§ 13. Matrices polinomiales

Reducir a la forma diagonal normal mediante transformaciones elementales las siguientes λ-matrices:

975. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **976.** $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$. **977.** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+5 \end{pmatrix}$.

978. $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$. **979.** $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}$.

980. $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$. **981.** $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

982. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$. **983.** $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

984*. Se denominan *factores invariantes* de la λ-matriz A de orden n los polinomios $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, ..., $E_n(\lambda)$, situados en la diagonal principal en la forma diagonal normal de la matriz A. Se denominan divisores de los menores de la matriz A los polinomios $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, ..., $D_n(\lambda)$, donde $D_k(\lambda)$ es el máximo divisor común (que se toma con el coeficiente mayor igual a la unidad) de los menores de orden k de la matriz A, si no todos esos menores son nulos, y $D_k(\lambda) = 0$ en caso contrario. Demostrar que $E_k(\lambda) \neq 0$ y $D_k(\lambda) \neq 0$ para $k = 1, 2, \ldots, r$, donde r es el rango de la matriz A, mientras que $E_k(\lambda) = D_k(\lambda) = 0$ para $k = r+1, \ldots, n$. Prosiguiendo, mostrar que $E_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ $(k = 1, 2, \ldots, r;\ D_0 = 1)$.

Reducir las siguientes λ-matrices a la forma diagonal normal, mediante los divisores de los menores, definidos en el problema 984.

985. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$.

986. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{pmatrix}$.

987.

$$\begin{bmatrix} (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) \end{bmatrix}.$$

988. $\begin{pmatrix} a^2cd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2cd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abd^2 \end{pmatrix}$,

donde a, b, c, d son polinomios primos entre sí de dos en dos con relación a λ.

989. $\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}$, donde $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son polinomios con respecto a λ.

990. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & fg \\ 0 & fh & 0 \\ gh & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde f, g, h son polinomios con respecto a λ, primos entre sí de dos en dos y que poseen los coeficientes mayores iguales a la unidad.

991. $\begin{pmatrix} fg & 0 & 0 \\ 0 & fh & 0 \\ 0 & 0 & gh \end{pmatrix}$, donde f, g, h son polinomios con respecto a λ los con coeficientes mayores iguales a la unidad, primos entre sí en conjunto, pero no es obligatorio que sean primos entre sí de dos en dos.

992. $\begin{pmatrix} fg & 0 & 0 \\ 0 & fh & 0 \\ 0 & 0 & gh \end{pmatrix}$, donde f, g, h son cualesquiera polinomios con respecto a λ, con los coeficientes mayores iguales a la unidad.

993. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. 994. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

995. $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda \end{pmatrix}$.

996. $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$.

997. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2-12\lambda+16 & 2-\lambda & 2\lambda^2-12\lambda+17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix}$.

998. $\begin{pmatrix} 3\lambda^2-5\lambda+2 & 0 & 3\lambda^2-6\lambda+3 \\ 2\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda-1 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \\ 2\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

999. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$.

Aclarar si las siguientes matrices son equivalentes entre sí:

1000.

$$A=\begin{pmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1001.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

1002.

$$A=\begin{pmatrix} 3\lambda^3-6\lambda^2+\lambda+3 & 2\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda \\ 3\lambda^2-8\lambda+5 & 2\lambda^2-4\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 3\lambda^3-3\lambda^2-5\lambda+6 & 2\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 3\lambda^3-9\lambda^2+7\lambda+1 & 2\lambda^3-6\lambda^2+7\lambda-2 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+9\lambda-5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+5\lambda+5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-2 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 3\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 2\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda-3\lambda^2-4 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 5\lambda^2-7\lambda+3 & 5\lambda-2\lambda^2-3 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

1003. La λ-matriz se denomina *unimodular* si su determinante es un polinomio de grado cero con respecto a λ, o sea, una constante distinta de cero. Hallar la forma diagonal normal de la λ-matriz unimodular.

1004. Demostrar que la matriz inversa de λ-matriz será λ-matriz si, y sólo si, la matriz A dada sea unimodular.

1005*. Demostrar la afirmación: para que dos λ-matrices rectangulares A y B, compuestas cada una de m filas y n columnas, sean equivalentes, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad $B = PAQ$, donde P y Q son λ-matrices unimodulares de órdenes m y n, respectivamente. Mostrar que las matrices requeridas P y Q pueden encontrarse de la siguiente manera: una vez hallada una serie de transformaciones elementales que pasan A en B, aplicar todas las transformaciones de las filas en el mismo orden a la matriz unidad E_m

de orden m, y todas las transformaciones de las columnas en el mismo orden a la matriz unidad E_n de orden n.

Para la λ-matriz A dada hallar, usando el método indicado en el problema 1005, las matrices unimodulares P y Q, tales que la matriz $B = PAQ$ tenga una forma diagonal normal (las matrices P y Q no se determinan unívocamente):

1006. $A = \begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda+4 & \lambda^2+3 \\ \lambda^2-2\lambda+3 & \lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1007. $A = \begin{pmatrix} \lambda^4+4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+2 & \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda \\ \lambda^4+5\lambda^3+8\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+5\lambda^2+8\lambda+4 \end{pmatrix}$.

1008.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^4+3\lambda^3-5\lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^4+3\lambda^3-5\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2 \\ \lambda^4-\lambda^3+1 & 2\lambda^4-\lambda^3-\lambda^2 & 2\lambda^4-2\lambda^3 \\ \lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^4-2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Para las λ-matrices A y B dadas hallar las λ-matrices unimodulares P y Q que satisfacen la igualdad $B = PAQ$ (matrices P y Q no se determinan unívocamente (véase el problema 1005)):

1009.

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda^2-\lambda+1 & 3\lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3\lambda^3+7\lambda+2 & 3\lambda^3+4\lambda-1 \\ 2\lambda^3+5\lambda+1 & 2\lambda^3+3\lambda-1 \end{pmatrix}.$$

1010.

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda^2-\lambda-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^3-\lambda \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 \\ \lambda^3-\lambda^2 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}.$$

1011.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda-1 & \lambda+1 & \lambda^2-2 \\ \lambda^3+2\lambda^2 & \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ \lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-2\lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 2\lambda^2-2\lambda-3 \\ 10\lambda+2 & 5\lambda+5 & 5\lambda^2-5\lambda-2 \\ 4\lambda^2-7\lambda-8 & 2\lambda^2-3\lambda-5 & 2\lambda^3-7\lambda^2+2\lambda+8 \end{pmatrix}.$$

1012.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 & 2\lambda^2+2\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2 & 5\lambda^2+5\lambda & 2\lambda^3+2\lambda^2 \\ \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 2\lambda^2+3\lambda+1 & \lambda^3+3\lambda^2+2\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 3\lambda^2+5\lambda+2 & 2\lambda^3+5\lambda^2+3\lambda & 2\lambda^3+2\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

1013.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2+3\lambda-4 & \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 \\ 2\lambda^2+3\lambda-5 & 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2\lambda^2+2\lambda-4 & 3\lambda^2+2\lambda-5 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 2\lambda^2+\lambda-3 & 3\lambda^2+\lambda-4 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1014.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+5 & \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1 \\ 2\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1 & 2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 \\ 3\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-1 & 6\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-4 \\ \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda-3 \end{pmatrix}.$$

Hallar los factores invariantes de las siguientes λ-matrices:

1015. $$\begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

1016. $$\begin{pmatrix} 3\lambda^3-2\lambda+1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-2\lambda & \lambda^2-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ 5\lambda^3-4\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1017.

$$\begin{pmatrix} 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda-2 \\ \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & \lambda^3-3\lambda^2+\lambda-3 & -\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda^3-\lambda^2+7\lambda-1 \\ \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & -2\lambda^3-\lambda^2-2\lambda-1 \\ 3\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda-2 & 3\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-4 & 2\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3 & 6\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-3 \end{pmatrix}.$$

1018.

$$\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 & \lambda^3-\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+4 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda+2 \\ \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+6 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-2 & 2\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+7 & \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+4 \\ \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+4 & \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+5 & \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+3 \\ 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+5 & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 & 4\lambda^3+\lambda^2-\lambda+7 & 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 \end{pmatrix}.$$

1019. $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & \lambda & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

1020*. $$\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & \beta & \beta & \beta & \dots & \beta \\ 0 & \lambda-\alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & \beta & \dots & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-\alpha \end{pmatrix}$$

(el orden de la matriz es igual a n).

Se denominan divisores elementales de la λ-matriz A los polinomios $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_s(\lambda)$ con los coeficientes mayores iguales a la unidad, cuando estos polinomios coinciden con las potencias superiores de los factores irreducibles, participantes de los desarrollos de los factores invariantes $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda), \dots, E_n(\lambda)$ de la matriz A según los factores irreducibles. En este caso, el conjunto de los divisores elementales de la matriz A contiene cada polinomio $E_i(\lambda)$ tantas veces cuantos son los factores invariantes $E_k(\lambda)$ que lo tienen en su desarrollo. El desarrollo en factores irreducibles se realiza sobre el campo conmutativo donde se examinan los polinomios que son elementos de la matriz A. En lo sucesivo si no se estipula lo contrario, se estudian los divisores elementales de un campo de números complejos, es decir, las potencias superiores de los polinomios tipo $\lambda-\alpha$ que entran en los desarrollos de los factores invariantes de la matriz A según los factores lineales.

Hallar los divisores elementales de las siguientes λ-matrices:

1021. $\begin{pmatrix} \lambda^3+2 & \lambda^3+1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}.$

1022. $\begin{pmatrix} \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}.$

1023. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda & 2\lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}.$

1024.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda-8 & \lambda^2+4\lambda+4 & \lambda^2-4 & \lambda^2-3\lambda-10 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda-10 & 2\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+3\lambda^2-\lambda-6 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda-12 \\ \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda-6 & \lambda^2+4\lambda+4 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda-8 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1025.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2+\lambda+3 & \lambda^2+2 & \lambda^2-3 \\ \lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+3\lambda-2 \\ 2\lambda^2-4 & \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+3 & 2\lambda^2-5 \\ 2\lambda^2+3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda+4 & \lambda^2+2\lambda+2 & 2\lambda^2+3\lambda-4 \end{pmatrix}.$$

Hallar los divisores elementales de las siguientes λ-matrices en el campo de los números racionales, el de los números reales y el de los números complejos:

1026. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5 \end{pmatrix}.$

1027. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & \lambda^6+6\lambda^4+\lambda^2+2 \\ 4\lambda^2+11 & 2\lambda^2+5 & 2\lambda^6+12\lambda^4+2\lambda^2-26 \\ 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & 2\lambda^6+12\lambda^4+\lambda^2-30 \end{pmatrix}.$

1028.

$$\begin{pmatrix} \lambda^4+1 & \lambda^7-\lambda^4+\lambda^3-1 & \lambda^4-4\lambda^3+4\lambda-5 \\ 2\lambda^4+3 & 2\lambda^7-2\lambda^4+4\lambda^3-2 & 3\lambda^4-10\lambda^3+\lambda^2+10\lambda-14 \\ \lambda^4+2 & \lambda^7-\lambda^4+2\lambda^3-2 & 2\lambda^4-6\lambda^3+\lambda^2+6\lambda-9 \end{pmatrix}.$$

Hallar la forma diagonal normal de una λ-matriz cuadrada si se saben sus divisores elementales, el rango r y el orden n:

1029. $\lambda+1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2;\ r=4,\ n=5.$

1030. $\lambda+2,\ (\lambda+2)^2,\ (\lambda+2)^3,\ \lambda-2,\ (\lambda-2)^3;\ r=n=4.$

1031. $\lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^3,\ \lambda+2,\ (\lambda+2)^2;\ r=4;\ n=5.$

1032*. Demostrar que el conjunto de divisores elementales de una λ-matriz diagonal se obtiene uniendo (con las debidas repeticiones) los conjuntos de divisores elementales de todos los elementos diagonales de dicha matriz.

1033*. Demostrar que el conjunto de divisores elementales de una λ-matriz diagonal-celular es igual a la unión (con las debidas repeticiones) de conjuntos de divisores elementales de todas sus células diagonales.

Haciendo uso de los problemas 1032 ó 1033, hallar la forma diagonal normal de las siguientes λ-matrices:

1034.

$$\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^3 \end{pmatrix}.$$

1035.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda \end{pmatrix}.$$

1036.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^3+6\lambda+9\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda^4+\lambda^3-6\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1037.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^4+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1038.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1039.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2\lambda & \lambda^2+5\lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+6\lambda-7 \end{pmatrix}.$$

1040.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3-2\lambda-4 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & \lambda^2+\lambda-6 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ \lambda^3-2\lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1041.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^3+\lambda^2-9\lambda-9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-6 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^3+2\lambda^3+\lambda-4 & \lambda^3+2\lambda^2-3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Después de determinar la equivalencia y la forma diagonal normal de las matrices de números enteros tal como se hizo en los problemas 942, 943, hallar los máximos comunes divisores D_k de los menores de orden k de las siguientes matrices, reduciéndolas a la forma diagonal normal mediante transformaciones elementales:

1042. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 12 & 14 & 5 \\ 0 & 4 & 14 & -1 \\ 10 & 6 & -4 & 11 \end{pmatrix}$. 1043. $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -9 & -3 \\ 12 & 24 & 9 & 9 \\ 30 & 42 & 45 & 27 \\ 66 & 78 & 81 & 63 \end{pmatrix}$.

1044. Demostrar que cualquier λ-matriz de rango r puede reducirse mediante las transformaciones elementales sólo de las filas (así como sólo de las columnas) a una forma triangular o trapezoidal con la particularidad de que los ceros, según el deseo de cada uno, pueden obtenerse por encima o por debajo de la diagonal principal, y los elementos, distintos de cero, se encontrarán sólo en las primeras r filas (respectivamente, en las primeras r columnas).

1045*. Demostrar que cada λ-matriz regular A puede representarse en forma de $A = PR$, donde P es una λ-matriz unimodular y R, una λ-matriz triangular, cuyos elementos en la diagonal principal tienen el coeficiente mayor igual a la unidad, por debajo de la diagonal principal son nulos, y por encima de ella tienen el grado inferior al del elemento de la diagonal principal de la misma columna (o son nulos), además dicha representación es la única.

§ 14. Matrices semejantes. Polinomios mínimo y característico. Formas diagonal y de Jordan de una matriz. Funciones de matrices

Todos los problemas de este párrafo se plantean en forma matricial. Por ejemplo, las propiedades de los números característicos de la matriz y la reducción de la matriz a la forma de Jordan se examinan sin relacionarlas con las propiedades de los vectores propios y los subespacios invariantes de la correspondiente transformación lineal. Dicha relación (por ejemplo, la búsqueda de la base en la que la matriz de la transformación lineal dada tiene la forma de Jordan) se estudia en la parte IV. Esto no impide utilizar los problemas de este párrafo al estudiar las propiedades de las transformaciones lineales en la medida en la que se haya asimilado la relación entre las transformaciones lineales y sus matrices en cualquier base.

1046. La matriz A se denomina *semejante* a la matriz B (lo que se designa del siguiente modo: $A \approx B$) si existe una matriz regular T, tal que $B = T^{-1}AT$. Mostrar que la relación de la semejanza posee las siguientes propiedades:

a) $A \approx A$; b) si $A \approx B$, entonces $B \approx A$;
c) si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$.

1047. Demostrar que si por lo menos una de las dos matrices A y B es regular, las matrices AB y BA son semejantes.

Dar un ejemplo de dos matrices degeneradas A y B, para las cuales las matrices AB y BA no serán semejantes.

1048*. Hallar todas las matrices, cada una de las cuales es semejante a sí misma.

1049. Sea la matriz B obtenida de A, permutando la i-ésima y j-ésima filas, así como de la i-ésima y j-ésima columnas. Demostrar que A y B son semejantes y hallar la matriz regular T para la cual $B = T^{-1}AT$.

1050*. Mostrar que la matriz A es semejante a la matriz B, obtenida mediante la reflexión especular en su centro.

1051. Sea $i_1, i_2, \ldots, i_n$ cualquier permutación de los números $1, 2, \ldots, n$. Demostrar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_n} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_2 i_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_n} a_{i_1} & a_{i_n i_2} & \ldots & a_{i_n i_n} \end{pmatrix}$$

son semejantes.

1052. Supongamos que se dan las matrices A y B semejantes entre sí. Mostrar que el conjunto de todas las matrices regulares T, para las cuales $B = T^{-1}AT$, se obtiene del conjunto de todas las matrices regulares, permutables con A, multiplicando a la derecha estas matrices por una matriz cualquiera T_0, cuya propiedad es $B = T_0^{-1}AT_0$.

1053. Demostrar que si la matriz A es semejante a una matriz diagonal, la p-ésima matriz A_p asociada con ella (problema 969) también es semejante a la matriz diagonal.

1054. Demostrar que si dos matrices A y B son semejantes a matrices diagonales, su producto de Kronecker $A \times B$ (problema 963) también es una matriz semejante a la diagonal.

1055. Demostrar que si las matrices A y B son semejantes, las p-ésimas matrices A_p y B_p asociadas con ellas (tomadas para cualesquiera dos posiciones de las combinaciones de n números de filas y columnas según p) son también semejantes.

1056. Demostrar que si las matrices A_1, B_1 son semejantes a A_2, B_2, respectivamente, los productos de Kronecker $A_1 \times B_1$ y $A_2 \times B_2$ (tomados para cualesquiera dos posiciones de los pares de índices) son también semejantes entre sí.

1057. Demostrar que si la λ-matriz cuadrada B se representa en forma de $B = B_0\lambda^s + B_1\lambda^{s-1} + \ldots + B_s$, donde $B_0, B_1, \ldots, B_s$ son matrices independientes de λ y la matriz B_0 es regular, entonces cualquier λ-matriz cuadrada A del mismo orden que tiene B, puede dividirse por B a la izquierda o a la derecha, es decir, existen el cociente Q_1 y el resto de la división R_1 derechos, tales que $A = BQ_1 + R_1$, y el cociente Q_2 y resto R izquierdos, tales que $A = Q_2B + R_2$, con la particularidad de que los grados de los elemen-

tos de las matrices R_1 y R_2 con respecto a λ son inferiores a s y ambos pares Q_1, R_1 y Q_2, R_2 se definen unívocamente.

1058. Dividir a la izquierda la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda^2+3\lambda+2 & -\lambda+6 \\ -3\lambda^2+7\lambda+11 & -3\lambda^2+9\lambda+1 & -2\lambda+8 \\ -\lambda^2+2\lambda+8 & -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda+4 \end{pmatrix}$$

por $B - \lambda E$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1059. Dividir a la derecha la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+6 & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda+6 \\ -2\lambda^3+2\lambda^2+9\lambda+8 & \lambda^2+6\lambda+1 & 2\lambda^2+7\lambda+8 \\ -\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+5 & \lambda^2+2\lambda-9 & \lambda^2+5\lambda-2 \end{pmatrix}$$

por $B - \lambda E$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1060*. Demostrar que si dos matrices A y B con elementos numéricos (o con elementos de cierto campo P) son semejantes, sus matrices características $A - \lambda E$ y $B - \lambda E$ son equivalentes.

1061*. Demostrar que si las matrices características $A - \lambda E$ y $B - \lambda E$ de dos matrices A y B son equivalentes, entonces esas mismas matrices son semejantes. Además, mostrar que si $B - \lambda E = P(A - \lambda E)Q$, donde P y Q son λ-matrices unimodulares y P_0, Q_0 son los restos de la división P a la izquierda y Q, a la derecha por $B - \lambda E$, entonces $B = P_0AQ_0$ y $P_0Q_0 = E$, o sea, la matriz Q_0 efectúa la semejante transformación de la matriz A en la B.

1062. Demostrar que cualquier matriz cuadrada A es semejante a su matriz traspuesta A'.

Aclarar si son semejantes entre sí las siguientes matrices:

1063. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$.

1064. $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$.

1065. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

$$C = \begin{pmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{pmatrix}.$$

1066. $A=\begin{pmatrix} 14 & -2 & -7 & -1 \\ 20 & -2 & -11 & -2 \\ 19 & -3 & -9 & -1 \\ -6 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 4 & 10 & -19 & 4 \\ 1 & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$C=\begin{pmatrix} 41 & -4 & -26 & -7 \\ 14 & -13 & -91 & -18 \\ 40 & -4 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el método indicado en el problema 1061, para las matrices A y B dadas hallar una matriz regular T, tal que $B = T^{-1}AT$ (la matriz buscada T se determina de modo no unívoco):

1067*. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$.

1068*. $A=\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}$.

1069. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

1070*. Demostrar que los coeficientes del polinomio característico $|A - \lambda E|$ de la matriz A se expresan de la siguiente manera, mediante los elementos de dicha matriz:

$$|A - \lambda E| = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \ldots + c_n,$$

donde c_k es la suma de todos los menores principales de orden k de la matriz A (el menor se denomina principal si los números de las filas ocupadas por él coinciden con los números de las columnas).

1071*. Hallar los números característicos (las raíces del polinomio característico) de la matriz $A'A$, donde $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y A' es la matriz obtenida, trasponiendo A.

1072. Demostrar que la suma de los números característicos de la matriz A es igual a su traza (o sea, a la suma de elementos de la diagonal principal), y el producto de estos números es igual al determinante $|A|$.

1073. Demostrar que todos los números característicos de la matriz A son distintos de cero si, y sólo si, la matriz A es regular.

1074*. Sean $p > 0$ la multiplicidad de la raíz λ_0 del polinomio característico $|A - \lambda E|$ de la matriz A de orden n, r el rango y $d = n - r$ el defecto de la matriz $A - \lambda_0 E$. Demostrar la validez de las desigualdades

$$1 \leqslant d = n - r \leqslant p.$$

1075. Citar algunos ejemplos de matrices de orden n para las cuales la primera desigualdad o la segunda del problema anterior se convierten en igualdad, o sea, $d = 1$ ó $d = p$.

1076*. Demostrar que los números característicos de la matriz inversa A^{-1} (teniendo en cuenta su multiplicidad) son iguales a las magnitudes inversas para los números característicos de la matriz A.

1077*. Demostrar que los números característicos de la matriz A^2 (teniendo en cuenta su multiplicidad) son iguales a los cuadrados de los números característicos de la matriz A.

1078*. Demostrar que los números característicos de la matriz A^p (teniendo en cuenta su multiplicidad) son iguales a las p-ésimas potencias de los números característicos de la matriz A.

1079*. Sean $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$ un polinomio característico, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los números característicos de la matriz A y $f(\lambda)$ un polinomio arbitrario. Demostrar que el determinante de la matriz $f(A)$ satisface la igualdad $|f(A)| = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n) = R(f, \varphi)$, donde $R(f, \varphi)$ es la resultante de los polinomios f y φ. Pero si se determina el polinomio característico como $\varphi(\lambda) = |\lambda E - A|$, entonces

$$|f(A)| = R(\varphi, f).$$

Recordemos que se denomina *resultante* de dos polinomios

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \text{ y } g(x) = b_0 \prod_{j=1}^{s} (x - \beta_j)$$

el número

$$R(f, g) = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j) = a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) = (-1)^{ns} b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j).$$

1080*. Demostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números característicos de la matriz A y $f(x)$ es un polinomio, entonces $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ serán números característicos de la matriz $f(A)$.

1081*. Demostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números característicos de la matriz A y $f(x) = g(x)/h(x)$ es una función racional, definida para el valor de $x = A$ (es decir, que satisface la condición $|h(A)| \neq 0$), entonces $|f(A)| = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n)$ y los números $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ serán números característicos de la matriz $f(A)$.

1082*. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, los polinomios característicos de las matrices AB y BA coinciden.

1083*. Hallar los números característicos de una matriz cíclica

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{pmatrix}.$$

1084*. Hallar los números característicos de la matriz de orden n

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1085*. Se denomina *matriz de Jordan* una matriz diagonal-celular con células diagonales tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix},$$

que se llaman células de Jordan. La matriz de Jordan A_j, semejante a la matriz A, se denomina forma de Jordan de la matriz A.

Haciendo uso del teorema de que el conjunto de divisores elementales de una matriz diagonal-celular es igual a la unión de los conjuntos de divisores elementales de sus células diagonales (véase el problema 1033), demostrar que sobre el campo de los números complejos (o sobre cualquier campo que contiene todos los números característicos de la matriz A) cualquier matriz A tiene la forma de Jordan, y además la única, con una precisión de hasta el orden de las células.

Escribir la forma de Jordan A_j de la matriz A si se dan los factores invariantes $E_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ de su matriz característica $A - \lambda E$:

1086. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1$, $E_3(\lambda) = E_4(\lambda) = \lambda - 1$, $E_5(\lambda) = E_6(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$.

1087. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = E_3(\lambda) = 1$, $E_4(\lambda) = \lambda + 1$, $E_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, $E_6(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$.

1088. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1$, $E_3(\lambda) = \lambda - 2$, $E_4(\lambda) = \lambda^2 - 4$.

1089. Demostrar que para cualquier λ-matriz cuadrada $A(\lambda)$ de orden n, cuyo determinante es un polinomio de grado n con respecto a λ, existe una matriz numérica B de orden n, tal que la matriz $A(\lambda)$ es equivalente a la matriz característica $B - \lambda E$.

Hallar la forma de Jordan de las siguientes matrices:

1090. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1091.** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. **1092.** $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$.

1093. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. **1094.** $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. **1095.** $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$.

1096. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. 1097. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 1098. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

1099. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$. 1100. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. 1101. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

donde $\alpha \neq 0$.

1102. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. 1103. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$. 1104. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1105. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. 1106. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1107. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 1108. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

1109. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ el orden de la matriz es igual a n.

1110. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, el orden de la matriz es igual a n.

1111. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. 1112. $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$.

1113. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$. 1114. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1115. Hallar la forma de Jordan de la matriz tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

a condición de que $a_{12}a_{23} \dots a_{n-1,\, n} \neq 0$.

1116. Demostrar que si el polinomio característico $|A - \lambda E|$ de la matriz A no tiene raíces múltiples, entonces A es semejante a una matriz diagonal (los elementos de la matriz T que transforma A en la forma diagonal, pertenecen al campo que contiene todos los números característicos de la matriz A).

1117. Demostrar que la matriz A sobre el campo P dado es semejante a una matriz diagonal cuando, y sólo cuando, el último factor invariante $E_n(\lambda)$ de la matriz característica $A - \lambda E$ no tiene raíces múlti les to 'as sus raíces pertenecen al campo P.

Aclarar si son las siguientes matrices semejantes a las diagonales en los campos de los números complejos, reales y racionales:

1118. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. **1119.** $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$.

1120. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$. **1121.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

1122. Demostrar que si el último factor invariante $E_n(\lambda)$ de la matriz característica $A - \lambda E$ para la matriz A de orden n tiene el grado n, todos los elementos diagonales de diferentes células de la forma de Jordan de la matriz A son distintos entre sí.

1123. Demostrar que la matriz A es nilpotente (o sea, $A^k = 0$ para cierto k natural) cuando, y sólo cuando, todos sus números característicos son nulos.

1124. Demostrar que una matriz nilpotente, distinta de cero, no se reduce a la forma diagonal mediante la transformación de semejanza.

1125. Hallar la forma de Jordan de una matriz idempotente A (es decir, una matriz que posee la propiedad de $A^2 = A$).

1126. Demostrar que la matriz involutiva A (o sea, una matriz que posee la propiedad de $A^2 = E$) es semejante a la matriz diagonal y hallar el aspecto de esa matriz diagonal.

1127. Demostrar que una matriz periódica A (o sea, una matriz que posee la propiedad de $A^k = E$ para cierto k natural) es semejante a una matriz diagonal y hallar el aspecto de esa matriz.

1128. Hallar el polinomio mínimo (la definición se da en el problema 830): a) de la matriz unidad, b) de la matriz nula.

1129. ¿Para qué matrices el polinomio mínimo tiene la forma de $\lambda - \alpha$, donde α es un número?

1130. Hallar el polinomio mínimo de la célula de Jordan de orden n en cuya diagonal está situado el número α.

1131. Demostrar que el polinomio mínimo de una matriz diagonal-celular es igual al mínimo divisor común de los polinomios mínimos de sus células diagonales.

1132. Demostrar que el polinomio mínimo de la matriz A es igual al último factor invariante $E_n(\lambda)$ de su matriz característica $A-\lambda E$.

1133. Demostrar que una potencia de un polinomio mínimo de la matriz A se divide por el polinomio característico de la misma matriz.

Hallar los polinomios mínimos de las siguientes matrices:

1134. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1135.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

1136. Demostrar que para la semejanza de dos matrices es necesario (pero no es suficiente) que éstas tengan los polinomios mínimo y característico iguales. Citar un ejemplo de dos matrices no semejantes, cuyos polinomios mínimo $\psi(\lambda)$ y característico $\varphi(\lambda)$ son los mismos.

1137. Hallar la k-ésima potencia de la célula de Jordan

$$A=\begin{Vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{Vmatrix} \quad \text{de orden } n.$$

1138*. Demostrar que el valor del polinomio $f(x)$ con respecto a la célula de Jordan A de orden n con el número α en la diagonal principal

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

se determina mediante la fórmula

$$f(A)=\begin{Vmatrix} f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \frac{f'''(\alpha)}{3!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f(\alpha) \end{Vmatrix}$$

1139. Resolver el problema 1080 usando la forma de Jordan de la matriz A.

1140. Hallar la forma de Jordan del cuadrado de la célula de Jordan, en cuya diagonal se encuentra el número $\alpha \neq 0$.

1141*. Hallar la forma de Jordan del cuadrado de la célula de Jordan con cero en la diagonal principal (célula nilpotente de Jordan).

1142. Sea X_j la forma de Jordan de la matriz X. Demostrar que $(A + \alpha E)_j = A_j + \alpha E$, donde A es cualquier matriz cuadrada y α, un número.

1143*. Hallar la forma de Jordan de la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{de orden } n \geqslant 3.$$

1144*. Demostrar que cualquier matriz cuadrada puede representarse en forma de un producto de dos matrices simétricas, una de las cuales es regular.

1145*. Conociendo los números característicos de la matriz A, hallar los números característicos de la p-ésima matriz A_p asociada a A (la definición se da en el problema 969).

1146*. Conociendo los números característicos de dos matrices cuadradas —A de orden p y B de orden q—, hallar los números característicos de su producto de Kronecker $A \times B$ (la definición se da en el problema 963).

1147*. Sea $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$ un polinomio mínimo de la matriz A de grado $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_s$. Aquí r_k es la multiplicidad de λ_k como de la raíz del polinomio mínimo $\psi(\lambda)$.

Si para la función $f(\lambda)$ existen los números

$$f(\lambda_k),\ f'(\lambda_k),\ f''(\lambda_k),\ \ldots,\ f^{(r_k-1)}(\lambda_k) \qquad (1)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s),$$

se dice que la función $f(\lambda)$ *está determinada en el espectro de la matriz* A y el sistema de números (1) se denomina *sistema de valores de la función* $f(\lambda)$ *en dicho espectro de la matriz* A. Demostrar que los valores de los polinomios $g(\lambda)$ y $h(\lambda)$ con respecto a la matriz A coinciden, es decir, $g(A) = h(A)$, cuando, y sólo cuando, coinciden los valores de esos polinomios en el espectro de la matriz A.

1148. Supongamos que la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A (en el sentido del problema anterior). Demostrar que si existe por lo menos un polinomio, cuyo valor en el espectro de la matriz A coincide con los valores de $f(\lambda)$, entonces habrá una cantidad infinita de semejantes polinomios y entre ellos existe uno, y sólo uno, que tiene el grado inferior al del polinomio mínimo de la matriz A. Este polinomio $r(\lambda)$ se llama *polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester* de la función $f(\lambda)$ en el espectro de la matriz A. Su valor con respecto a A se toma, según la definición, como el valor de la función $f(\lambda)$ con respecto a esa matriz: $f(A) = r(A)$.

1149. Demostrar que si la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A y el polinomio característico $|A - \lambda E|$ no tiene raíces múltiples, el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$ existe y en este caso la matriz $f(A)$ tiene sentido. Hallar el aspecto de $r(\lambda)$ y $f(A)$.

1150. Demostrar que si la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A y el polinomio mínimo de esta matriz $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_s)$ no tiene raíces múltiples, el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$ existe y la matriz $f(A)$ tiene sentido. Hallar la expresión para calcular $f(A)$.

1151*. Demostrar que si la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A, la definición de la matriz $f(A)$ (se ha dado en el problema 1148) tiene sentido, o sea, existe el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$. Sean $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \ldots \ldots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$ un polinomio mínimo de la matriz A, donde las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ se difieren entre sí, y

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{r_k}} \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Mostrar que

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} [\alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}(\lambda - \lambda_k) + \ldots + \alpha_{k,r_k} \times \\ \times (\lambda - \lambda_k)^{r_k - 1}] \cdot \psi_k(\lambda), \quad (1)$$

donde los números $\alpha_{k,j}$ se determinan de las igualdades

$$\alpha_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]^{(j-1)}_{\lambda = \lambda_k} \\ (j = 1, 2, \ldots, r_k;\ k = 1, 2, \ldots, s), \quad (2)$$

es decir, la expresión en corchetes de la igualdad (1) es igual a la suma de los primeros r_k términos del desarrollo en la serie de Taylor según las potencias de la resta de $\lambda - \lambda_k$ para la función $\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}$.

1152. Sean $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)^3$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ un polinomio mínimo de la matriz A y $f(\lambda)$ una función determinada en el espectro de esa matriz. Escribir la expresión para la matriz $f(A)$, aplicando el precedente problema.

1153. Demostrar que si las matrices A y B son semejantes con la particularidad de que $B = T^{-1}AT$ y para la función $f(\lambda)$ la matriz $f(A)$ existe, entonces también existe la matriz $f(B)$ y es semejante a $f(A)$, además, $f(B) = T^{-1}f(A)\,T$ con la misma matriz T.

1154*. Demostrar que si la matriz A es diagonal-celular

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}$$

y la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A, entonces

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & & & 0 \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(A_s) \end{pmatrix}.$$

1155. Hallar el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$ y el valor de $f(A)$ de la función $f(\lambda)$ para la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué funciones $f(\lambda)$ el valor de $f(A)$ tiene sentido?

1156. Resolver el problema, análogo al antecedente, para la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1157. Mostrar que si la matriz A es semejante a la diagonal

$$A=T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}T$$

y para la función $f(\lambda)$ la matriz $f(A)$ existe, entonces $f(A)$ también es semejante a la matriz diagonal con la particularidad de que

$$f(A)=T^{-1}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & 0 \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}T$$

con la misma matriz T.

1158. Demostrar que si $f(\lambda)=g(\lambda)+h(\lambda)$ y las matrices $g(A)$ y $h(A)$ existen, la matriz $f(A)$ también existe, además, $f(A)=g(A)+h(A)$.

1159. Demostrar que si $f(\lambda)=g(\lambda)\,h(\lambda)$ y las matrices $g(A)$ y $h(A)$ existen, la matriz $f(A)$ también existe, con la particularidad de que $f(A)=g(A)\,h(A)$.

1160*. Mostrar que la función $f(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ está determinada para todas las matrices regulares A y sólo para ellas, además, $f(A)=A^{-1}$.

1161. Demostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números característicos de la matriz A y la función $f(\lambda)$ tiene sentido para $\lambda = A$, entonces $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ serán números característicos de la matriz $f(A)$.

Calcular los siguientes valores de las funciones con respecto a las matrices, utilizando el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester y los problemas 1148—1152 ó hallando la matriz que da la transformación de semejanza de la matriz dada en su forma de Jordan y haciendo uso de los problemas 1154, 1156 y 1153:

1162: A^{100} donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1163. A^{50} donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1164. $\sqrt{A}$ donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1165. $\sqrt{A}$ donde $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1166. e^A donde $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

1167. e^A donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1168. e^A donde $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

1169. $\ln A$ donde $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

1170. $\operatorname{sen} A$ donde $A = \begin{pmatrix} \pi-1 & 1 \\ -1 & \pi+1 \end{pmatrix}$.

1171*. Demostrar que la igualdad $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$ es válida para cualquier matriz cuadrada A.

1172*. Demostrar que la matriz e^A existe y es regular para cualquier matriz cuadrada A.

1173. Hallar el determinante de la matriz e^A, donde A es una matriz cuadrada de orden n.

1174*. Supongamos que la función $f(\lambda)$ tiene sentido para $\lambda = A$. Demostrar que el determinante de la matriz $f(A)$ satisface la igualdad $|f(A)| = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n)$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números característicos de la matriz A (teniendo en cuenta su multiplicidad).

§ 15. Formas cuadráticas [1]

En este párrafo, además de los problemas sobre formas cuadráticas, se dan problemas de las propiedades de las matrices ortogonales y simétricas, relacionadas con la teoría de las formas cuadráticas. Aquí se utiliza la siguiente terminología: como *transformación lineal* se entiende la transformación de las *incóg-*

[1]) Los problemas de las funciones cuadráticas y bilineales se dan en el § 24.

nitas tipo:

$$x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \ldots + q_{1n}y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$
$$x_n = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \ldots + q_{nn}y_n.$$

La matriz

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

formada de los coeficientes de la transformación (1) en el orden correspondiente, se denomina matriz de dicha transformación. La transformación lineal se llama *regular* si su matriz es regular. Dos formas cuadráticas se denominan *equivalentes* si una de ellas pasa a la otra mediante la transformación lineal regular. Se llama forma *canónica* de la forma cuadrada dada la equivalente con ella, que no contiene productos de incógnitas, y forma *normal*, la forma canónica en la cual los coeficientos de las incógnitas elevadas al cuadrado (sin contar las nulas) son iguales a ± 1 para el campo real y $+1$ para el campo complejo.

Hallar en el campo de números reales la forma normal de las siguientes formas cuadráticas:

1175. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

1176. $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$

1177. $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$

1178. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$

1179. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$

Hallar la forma normal y la transformación lineal regular que conduce a dicha forma, para las siguientes formas cuadráticas (a causa de que la transformación lineal buscada es no unívoca, la respuesta puede diferenciarse de la citada más abajo):

1180. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$

1181. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$

1182. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$

1183. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3.$

1184. $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3.$

1185. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1.$

1186. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4.$

Reducir las siguientes formas cuadráticas a la forma canónica con coeficientes enteros mediante la transformación lineal regular con coeficientes racionales y hallar la expresión para nuevas incógnitas a través de las anteriores:

1187. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$

1188. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3.$

1189. $^1/_2 x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4.$

Para las siguientes formas cuadráticas hallar la transformación lineal regular que convierte la forma f en la g (la transformación buscada no se define unívocamente):

1190. $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3;$
$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$

1191. $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3;$
$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2.$

1192. $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3;$
$g = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3.$

Reducir las siguientes formas cuadráticas a la forma canónica y hallar la expresión de nuevas incógnitas a través de las anteriores (la respuesta no es unívoca):

1193. $\sum_{i,j=1}^{n} a_ia_jx_ix_j$, donde no todos les números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son nulos.

1194. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} x_ix_j$. **1195*.** $\sum_{i<j}^{n} x_ix_j$. **1196.** $\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

1197*. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - s)^2$, donde $s = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$.

1198*. $\sum_{i<j}^{n} |i-j| \cdot x_ix_j$.

1199*. Supongamos que se da la forma cuadrática

$$f = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \ldots - l_{p+q}^2,$$

donde $l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \ldots, l_{p+q}$ son formas lineales reales con respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Demostrar que el índice positivo de la inercia (o sea, el número de coeficientes positivos en la forma canónica) de la forma f no supera p y el índice de inercia negativo no supera q.

1200*. Demostrar que si de cada una de las dos formas f y g puede pasarse a la otra mediante alguna transformación lineal (no es obligatorio que sea regular), estas formas son equivalentes.

Aclarar cuáles de las siguientes formas son equivalentes entre sí en el campo de los números reales:

1201. $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$; $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$; $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$.

1202. $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3;$
$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3;$
$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3.$

1203. Mostrar que todas las formas cuadráticas con respecto a n incógnitas pueden dividirse en clases de tal modo que dos formas serán equivalentes cuando, y sólo cuando, pertenezcan a una misma

clase. Hallar la cantidad de dichas clases en los campos real y complejo.

1204. ¿Qué valores del rango y la signatura caracterizan las clases de las formas cuadráticas reales equivalentes, para las cuales la forma f es equivalente a $-f$?

1205. En el campo de los números reales hallar el número de clases de equivalencia de las formas con respecto a n incógnitas que tienen la signatura dada s.

1206. Demostrar que para descomponer una forma cuadrática en el producto de dos formas lineales es necesario y suficiente el cumplimiento de las condiciones: a) en el campo de los números reales: el rango no supera a dos, y siendo el rango igual a dos, la signatura es igual a cero; b) en el campo de los números complejos: el rango no supera a dos.

1207. Demostrar que la forma cuadrática f es determinada positiva cuando, y sólo cuando, su matriz se representa en forma de $A = C'C$, donde C es una matriz real regular y C', la matriz traspuesta a C.

1208. Haciendo uso de los problemas 913, 951 y 1207, demostrar que una forma cuadrática es determinada positiva cuando, y sólo cuando, todos sus menores angulares son positivos. En calidad de menor angular de una forma cuadrática se comprende el menor de orden k que se encuentra en las primeras k filas y primeras k columnas de su matriz ($k = 1, 2, \ldots, n$; n es el orden de la matriz).

1209. Demostrar que en una forma determinada positiva todos los coeficientes de las incógnitas elevadas al cuadrado son positivos, pero que esta condición no es suficiente para que la forma sea determinada positiva.

1210*. Demostrar las afirmaciones:

a) Para que la forma cuadrática f sea determinada positiva es necesario y suficiente que no sólo los menores angulares (véase el problema 1208), sino todos los principales de su matriz sean positivos.

b) Para que una forma cuadrática f sea no negativa (o sea, $f \geqslant 0$ para cualesquiera valores reales de las incógnitas), es necesario y suficiente que todos los menores principales de su matriz sean no negativos. Mostrar en ejemplos que (a diferencia de las formas determinadas positivas) para que f sea no negativa, no es suficiente que todos los menores angulares sean no negativos.

c) Para que la matriz simétrica real A se represente en forma de $A = C'C$, donde C es una matriz regular real, es necesario y suficiente que todos los menores angulares de la matriz A sean positivos.

d) Para que la matriz simétrica real A se represente en forma de $A = C'C$, donde C es una matriz cuadrada real, es necesario y suficiente que todos los menores principales de la matriz A sean no negativos. Además, si el rango de A es r, el rango de C también es r, y las primeras r filas de C pueden considerarse linealmente independientes y las demás, nulas.

1211. Demostrar que la forma cuadrática f es determinada negati-

va (es decir, $f < 0$ para cualesquiera valores reales de las incógnitas, de las cuales no todas son iguales a cero) cuando, y sólo cuando, los signos de los menores angulares $D_1, D_2, \ldots, D_n$ se alternan con la particularidad de que $D_1 < 0$. Aquí D_k es el menor angular de orden k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Hallar todos los valores del parámetro λ, para los cuales las siguientes formas cuadráticas son determinadas positivas:

1212. $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1213. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

1214. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1215. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

1216. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1217*. Se denomina *discriminante D_f de una forma cuadrática f* el determinante de su matriz. Demostrar que si a una forma cuadrática determinada positiva $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se le añade el cuadrado de una forma lineal no nula de las mismas incógnitas, el discriminante de la forma aumenta.

1218*. Sean $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ una forma cuadrática determinada positiva y $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)$. Demostrar que para los discriminantes de estas formas se cumple la desigualdad $D_f \leqslant a_{11}D_\varphi$.

1219*. Demostrar que si la forma cuadrática no negativa se convierte en cero por lo menos para un conjunto no nulo de valores reales de las incógnitas, esta forma es degenerada (o sea, su discriminante es igual a cero).

1220*. Denominaremos *composición de dos formas cuadráticas*

$$f = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad \text{y} \quad g = \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$$

la forma cuadrática $(f, g) = \sum\limits_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_ix_j$.

Demostrar que:

a) si las formas y y g son no negativas, la forma (f, g) también es no negativa;

b) si las formas f y g son determinadas positivas, la forma (f, g) también es determinada positiva.

1221*. Se denomina transformación triangular la transformación lineal tipo

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ y_2 &= x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Demostrar que:

a) la transformación triangular es regular y la transformación inversa de la triangular, es de nuevo triangular;

b) los menores angulares D_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) (véase el problema 1208) de la forma cuadrática $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ para la transformación triangular no cambian.

1222*. Demostrar que:

a) para que la forma cuadrática de rango r $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ se pueda, mediante una transformación triangular, reducir a la forma de

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2, \tag{1}$$

donde $\lambda_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \ldots, r$), es necesario y suficiente que

$$D_k \neq 0 \ (k \leqslant r), \quad D_k = 0 \ (k > r), \tag{2}$$

donde D_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) son los menores angulares de la forma f (véase el problema 1208);

b) la forma canónica indicada (1) está determinada unívocamente, con la particularidad de que sus coeficientes se hallan según las fórmulas

$$\lambda_k = \frac{D_k}{D_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, r; \ D_0 = 1) \tag{3}$$

(teorema de Sylvester).

1223. Supongamos que los menores angulares de la forma cuadrática f de rango r satisfacen las condiciones (2) del problema anterior. Demostrar que el índice positivo de inercia de dicha forma es igual al número de conservaciones del signo, y el índice negativo, al número de cambios del signo en la serie de números

$$1 = D_0, D_1, \ldots, D_r.$$

Comprobar que en los siguientes pares de formas cuadráticas una de ellas es determinada positiva; hallar la transformación lineal regular que convierte esa forma en la forma normal, y la otra forma del mismo par a la forma canónica, y escribir esta forma canónica (la transformación lineal no se determina unívocamente):

1224. $f = -4x_1x_2,$
$g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2.$

1225. $f = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2,$
$g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2.$

1226. $f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3,$
$g = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3.$

1227. $f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4,$
$g = {}^{17}/_4 x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4.$

1228. $f = x_1^2 + {}^{3}/_2 x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3,$
$g = x_1^2 + {}^{5}/_4 x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3.$

1229. $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

1230*. Supongamos que se da un par de formas f, g con respecto a las mismas incógnitas, con la particularidad de que $g > 0$. Demostrar que la forma canónica

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

que se obtiene para la forma f con cualquier transformación lineal que reduce la forma g a la forma normal (es decir, a la suma de cuadrados), se determina unívocamente con una precisión de hasta el orden de los sumandos, además sus coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son raíces de la denominada λ-ecuación del par de formas f, g, a saber: de la ecuación $|A - \lambda B| = 0$, donde A y B son las matrices de las formas f y g, respectivamente.

¿Se podrán reducir los siguientes pares de formas cuadráticas a la forma canónica mediante una transformación lineal regular real?

1231. $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$,
$g = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

1232. $f = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$,
$g = x_1^2 - 2x_1x_2$.

1233. Supongamos que se dan dos formas determinadas positivas f y g, y que una transformación lineal regular de las incógnitas reduce la forma f al aspecto $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ y la forma g a la forma normal, y la segunda transformación, al contrario, reduce la forma f a la forma normal y g a la forma $\sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i^2$. Hallar la relación entre los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Sin buscar la transformación lineal, hallar la forma canónica de dicha forma f a la que se reduce ésta, mediante la transformación que reduce, al mismo tiempo, la forma g dada ($g > 0$) a la forma normal:

1234. $f = 21x_1^2 - 18x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 28x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = 11x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$.

1235. $f = 14x_1^2 - 4x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 26x_2x_3$.
$g = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1236. Demostrar que dos pares de formas f_1, g_1 y f_2, g_2, donde g_1 y g_2 están determinadas positivas, son equivalentes (o sea, existe una transformación lineal regular que reduce f_1 a f_2 y g_1 a g_2) cuando, y sólo cuando las raíces de sus λ-ecuaciones $|A_1 - \lambda B_1| = 0$ y $|A_2 - \lambda B_2| = 0$ coinciden.

Sin buscar la transformación lineal de un par en otro, aclarar si son equivalentes los siguientes pares de formas:

1237. $f_1 = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$,
$g_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$,
$f_2 = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
$g_2 = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

1238. $f_1 = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 21x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 22x_2x_3$,
$g_1 = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$,
$f_2 = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3$,
$g_2 = 9x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Hallar la transformación lineal regular que reduce un par de formas cuadráticas f_1, g_1 a otro par f_2, g_2 (la transformación buscada se determina no unívocamente):

1239. $f_1 = 2x_1^2 - 7x_2^2 + 2x_1x_2$,
$f_2 = -7y_1^2 - 3y_2^2 - 12y_1y_2$,
$g_1 = 2x_1^2 + 13x_2^2 + 10x_1x_2$,
$g_2 = 13y_1^2 + 25y_2^2 + 36y_1y_2$.

1240. $f_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 10x_1x_2$,
$f_2 = -9y_1^2 - 20y_2^2 - 44y_1y_2$,
$g_1 = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2$,
$g_2 = 29y_1^2 + 4y_2^2 + 20y_1y_2$.

1241. Supongamos que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son dos formas cuadráticas de las cuales por lo menos una es determinada positiva. Demostrar que las «superficies» $f = 1$ y $g = 1$ en un espacio n-dimensional no se intersecan (o sea, no tienen puntos comunes) cuando, y sólo cuando, la forma $f - g$ está determinada.

1242*. Demostrar que la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, a que se reduce la forma cuadrática f mediante una transformación ortogonal, está determinada unívocamente con la particularidad de que sus coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son raíces de la ecuación característica $|A - \lambda E| = 0$ de la matriz A de la forma f.

Hallar la forma canónica a que se reducen las siguientes formas cuadráticas mediante una transformación ortogonal, sin buscar la misma transformación:

1243. $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1244. $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1245. $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1246. $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1247*. $\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}$.

Hallar la transformación ortogonal que reduce las siguientes formas a la forma canónica (reducción a los ejes principales) y escribir esa forma canónica (la transformación no está definida unívocamente):

1248. $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

1249. $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

1250. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1251. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1252. $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

1253. $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1254. $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.

1255. $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

1256. $5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 +$
$+ 6x_2x_3 + 2x_2x_4 - 10x_3x_4$.

1257. $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$.

1258. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$.

1259. $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.

1260. $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + 12x_4x_5 + x_5^2$.

1261. $4x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 6x_4x_5 + 3x_5^2$.

1262. $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_3x_4 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_5x_6 + x_6^2$.

1263. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j}^{n} x_ix_j$. **1264.** $\sum\limits_{i<j}^{n} x_ix_j$.

Hallar la forma canónica a que se reducen las siguientes formas mediante una transformación ortogonal y expresar las nuevas incógnitas a través de las anteriores (la transformación buscada no es unívoca):

1265*. Denominaremos dos formas cuadráticas *equivalentes ortogonalmente* si de una de ellas se puede pasar a la otra mediante una transformación ortogonal. Demostrar que para una equivalencia ortogonal de dos formas es necesario y suficiente que los polinomios característicos de sus matrices coincidan.

Aclarar cuáles de las siguientes formas cuadráticas son equivalentes ortogonalmente:

1266. $f = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,
$g = -3y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 - 12y_1y_2 + 12y_1y_3 + 6y_2y_3$,
$h = 11z_1^2 - 4z_2^2 + 11z_3^2 + 8z_1z_2 - 2z_1z_3 + 8z_2z_3$.

1267. $f = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 16x_2x_3$,
$g = {}^2/_3 y_1^2 - {}^1/_3 y_2^2 - {}^1/_3 y_3^2 - {}^4/_3 y_1y_2 + {}^4/_3 y_1y_3 + {}^8/_3 y_2y_3$.
$h = z_2^2 - z_3^2 + 2\sqrt{2}z_1z_3$.

1268. Demostrar que cualquier matriz simétrica real A puede representarse en la forma: $A = Q^{-1}BQ$, donde Q es una matriz ortogonal y B, una matriz diagonal real.

Para las siguientes matrices hallar la ortogonal Q y la diagonal real B tales que la matriz dada se represente en forma de $Q^{-1}BQ$:

1269. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **1270.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1271*. Demostrar que todos los números característicos de una matriz simétrica real A yacen en el segmento $[a, b]$ cuando, y sólo cuando, la forma cuadrática con la matriz $A - \lambda_0 E$ está determi-

nada positivamente para cualquier $\lambda_0 < a$ y determinada negativamente para cualquier $\lambda_0 > b$.

1272*. Sean A y B matrices simétricas reales. Demostrar que si los números característicos de la matriz A yacen en el segmento $[a, b]$ y los de la matriz B, en el segmento $[c, d]$, los números característicos de la matriz $A + B$ están en el segmento $[a + c, b + d]$.

1273. Demostrar que una forma cuadrática real y regular puede reducirse a la forma normal mediante una transformación ortogonal si, y sólo si, su matriz es ortogonal.

1274. Demostrar que una matriz de forma cuadrática determinada positiva es ortogonal cuando, y sólo cuando, esa forma es una suma de cuadrados. ¿De qué modo puede enunciarse esta tesis en el lenguaje de matrices?

1275*. Demostrar que cualquier matriz regular real A puede representarse como $A = QB$, donde Q es una matriz ortogonal y B una matriz triangular tipo

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

con elementos positivos en la diagonal principal, y esta representación es única.

1276*. Demostrar que:

a) cualquier matriz regular real A puede representarse tanto en forma de $A = Q_1B_1$, como $A = Q_2B_2$, donde las matrices Q_1 y Q_2 son ortogonales y reales y B_1 y B_2, simétricas reales y con menores angulares positivos. Cada una de dichas representaciones es única;

b) cualquier matriz regular compleja A puede representarse tanto en forma de $A = Q_1B_1$, como $A = B_2Q_2$, donde las matrices Q_1 y Q_2 son unitarias y B_1 y B_2, hermitianas con menores angulares positivos (la matriz B se denomina hermitiana si $\overline{B}' = B$). Cada una de esas representaciones es única;

c) sean A una matriz simétrica (o hermitiana) con menores angulares positivos y B una matriz ortogonal (unitaria correspondientemente). Demostrar que:

1) los productos AB y BA serán matrices simétricas (hermitianas) con menores angulares positivos cuando, y sólo cuando, B sea una matriz unidad;

2) los productos AB y BA serán ortogonales (unitarios), cuando, y sólo cuando, A sea una matriz unidad.

PARTE IV

ESPACIOS VECTORIALES Y SUS TRANSFORMACIONES LINEALES

§ 16. Espacios vectoriales afines

A continuación se usan las siguientes designaciones: los vectores se indican con minúsculas latinas de letra negrilla, y los espacios vectoriales, sus subespacios y las variedades lineales, con mayúsculas latinas de letra negrilla. Ordinariamente las coordenadas del vector se escriben en fila encerradas dentro del paréntesis, por ejemplo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Los vectores de la base en forma matricial, se escriben en fila dentro del paréntesis y las coordenadas del vector, en columna dentro del paréntesis.

Se denomina *matriz del cambio* de la base inicial $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ por la nueva $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ la matriz $T = (t_{ij})_1^n$, en cuyas columnas se encuentran las coordenadas de los nuevos vectores básicos en la base inicial. Así, pues, las bases nueva e inicial están relacionadas por una igualdad matricial

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot T. \tag{1}$$

Para esas designaciones las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del vector $\mathbf{x}$ en la base inicial se relacionan con las coordenadas $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ del mismo vector en la nueva base mediante las igualdades $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j$, o escribiendo en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Se denomina *subespacio lineal* de un espacio vectorial $\mathbf{R}$ un conjunto no vacío (o sea, que contiene por lo menos un vector) $\mathbf{L}$ de vectores de $\mathbf{R}$ que posee las siguientes propiedades:

1) la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ de cualesquiera dos vectores de $\mathbf{L}$ pertenece de nuevo a $\mathbf{L}$;

2) el producto $\alpha \cdot \mathbf{x}$ de cualquier vector $\mathbf{x}$ de $\mathbf{L}$ por cualquier número α pertenece de nuevo a $\mathbf{L}$.

Se denomina *variedad lineal* del espacio vectorial $\mathbf{R}$ el conjunto de $\mathbf{P}$ vectores de $\mathbf{R}$, obtenido añadiendo un mismo vector $\mathbf{x}_0$ a todos los vectores de cierto subespacio $\mathbf{L}$ de $\mathbf{R}$. Esta relación de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{L}$ se designará de la siguiente manera: $\mathbf{P} = \mathbf{L} + \mathbf{x}_0$ ó $\mathbf{L} = \mathbf{P} - \mathbf{x}_0$. Diremos que la variedad lineal $\mathbf{P}$ está obtenida de un subespacio lineal $\mathbf{L}$ por medio del desplazamiento paralelo en el vector $\mathbf{x}_0$.

Se denomina *dimensión* de una variedad lineal la dimensión del subespacio lineal, desplazando paralelamente al cual se obtuvo la variedad dada. El hecho de que dicha definición es correcta se desprende de la afirmación del problema 1331. Las variedades lineales unidimensionales se llamarán rectas, y las bidimensionales, planos.

Se denomina *suma* de dos subespacios lineales L_1 y L_2 del espacio R un conjunto $S = L_1 + L_2$ de todos los vectores pertenecientes a R, cada uno de los cuales se representa como $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in L_1$ y $x_2 \in L_2$. Aquí la notación $a \in A$ significa: «el elemento a pertenece al conjunto A». Se llama *intersección* de dos subespacios lineales L_1 y L_2 del espacio vectorial R el conjunto $D = L_1 \cap L_2$ de todos los vectores de R, cada uno de los cuales pertenece tanto a L_1, como a L_2.

Se denomina *suma directa* de dos subespacios lineales L_1 y L_2 del espacio vectorial R la suma de estos subespacios a condición de que su intersección consiste sólo del vector nulo, es decir, $L_1 \cap L_2 = 0$. En caso de la suma directa escribiremos $S = L_1 \dotplus L_2$.

El espacio vectorial n-dimensional se indicará con la notación R_n. Si no se dice de antemano lo contrario, se considera que a título de campo principal se toma el campo de los números reales, o sea, R_n consiste de todos los vectores n-dimensionales con cualesquiera coordenadas reales.

Los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ y x vienen dados por sus coordenadas en cierta base. Mostrar que los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forman de por sí una base y hallar las coordenadas del vector x en esta base:

1277. $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$; $x = (6, 9, 14)$.

1278. $e_1 = (2, 1, -3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$, $e_3 = (1, -1, 1)$; $x = (6, 2, -7)$.

1279. $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)$; $x = (7, 14, -1, 2)$.

Demostrar que cada uno de los dos sistemas de vectores es base y hallar la relación entre las coordenadas del mismo vector en estas dos bases:

1280. $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 3)$, $e_3 = (3, 7, 1)$; $e'_1 = (3, 1, 4)$, $e'_2 = (5, 2, 1)$, $e'_3 = (1, 1, -6)$.

1281. $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 1, 1)$, $e_3 = (1, 1, 2, 1)$, $e_4 = (1, 3, 2, 3)$; $e'_1 = (1, 0, 3, 3)$, $e'_2 = (-2, -3, -5, -4)$, $e'_3 = (2, 2, 5, 4)$, $e'_4 = (-2, -3, -4, -4)$.

1282. Hallar las coordenadas del polinomio

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

a) en la base $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

b) en la base $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \ldots, (x - \alpha)^n$, aclarando que los últimos polinomios forman en realidad una base.

1283. Hallar la matriz del cambio de la base $1, x, x^2, \ldots, x^n$ por la base $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \ldots, (x - \alpha)^n$ del espacio de los polinomios de grado inferior o igual a n.

1284. ¿De qué modo variará la matriz del cambio de una base por otra si:

a) se cambian de sitio dos vectores de la primera base?

b) se cambian de sitio dos vectores de la segunda base?

c) se escriben los vectores de ambas bases en orden inverso?

¿Será un subespacio lineal del correspondiente espacio vectorial cada uno de los conjuntos de los vectores mencionados en los siguientes problemas?

1285. Todos los vectores del espacio vectorial n-dimensional, cuyas coordenadas son números enteros.

1286. Todos los vectores del plano, cada uno de los cuales yace en uno de los ejes de coordenadas Ox y Oy.

1287. Todos los vectores del plano, cuyos extremos yacen en una recta dada (si no se dice de antemano lo contrario, el origen de cualquier vector se supone coincidente con el origen de las coordenadas).

1288. Todos los vectores del plano, cuyos orígenes y extremos yacen en la recta dada.

1289. Todos los vectores de un espacio tridimensional, cuyos extremos no están en la recta dada.

1290. Todos los vectores del plano, cuyos extremos yacen en el primer cuadrante del sistema de coordenadas.

1291. Todos los vectores de R_n, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

1292. Todos los vectores de R_n, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

1293. Todos los vectores que son combinaciones lineales de vectores dados: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de R_n.

1294. Enumerar todos los subespacios lineales de un espacio vectorial tridimensional.

1295. Supongamos que el subespacio lineal L_2 contiene el subespacio lineal L_1. Demostrar que la dimensión de L_1 no supera a la de L_2, con la particularidad de que las dimensiones son iguales entre sí cuando, y sólo cuando, $L_1 = L_2$. ¿Es válida la última afirmación para cualesquiera dos subespacios lineales del espacio dado?

1296. Demostrar que si la suma de las dimensiones de dos subespacios lineales del espacio n-dimensional supera a n, dichos subespacios poseen un vector no nulo común.

Demostrar que los siguientes sistemas de vectores forman subespacios lineales y hallar su base y dimensión:

1297. Todos los vectores n-dimensionales, que tienen iguales la primera coordenada y la última.

1298. Todos los vectores n-dimensionales, cuyas coordenadas con números pares son nulas.

1299. Todos los vectores n-dimensionales, cuyas coordenadas con números pares son iguales entre sí.

1300. Todos los vectores n-dimensionales tipo $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$ donde α y β son cualesquiera números.

1301. Demostrar que todas las matrices cuadradas de orden n con elementos reales (o elementos de cualquier campo P) forman un espacio vectorial sobre el campo de los números reales (correspondientemente, sobre el campo P), si en calidad de operaciones se toman la adición de las matrices y la multiplicación de la matriz por un número. Hallar la base y la dimensión de ese espacio.

1302. Demostrar que todos los polinomios de grado $\leqslant n$ con una

variable que posee coeficientes reales (o coeficientes de cualquier campo P) forman un espacio vectorial si a título de operaciones se toman las operaciones corrientes de adición de los polinomios y multiplicación del polinomio por un número. Hallar la base y dimensión de dicho espacio.

1303. Demostrar que todas las matrices simétricas forman un subespacio lineal del espacio de todas las matrices cuadradas de orden n. Hallar la base y dimensión de dicho subespacio.

1304. Demostrar que las matrices antisimétricas forman un subespacio lineal del espacio de todas las matrices cuadradas de orden n. Hallar la base y dimensión de dicho subespacio.

1305. Demostrar que si el subespacio lineal L del espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ contiene por lo menos un polinomio de grado k para $k = 0, 1, 2, \ldots, p$, pero no contiene polinomios de grado $k > p$, entonces L coincide con el subespacio L_p de todos los polinomios de grado $\leqslant p$.

1306. Sea f una forma cuadrática no negativa con respecto a n incógnitas de rango r. Demostrar que todas las soluciones de la ecuación $f = 0$ forman un subespacio lineal $(n - r)$-dimensional del espacio R_n.

1307. Demostrar que las soluciones de cualquier sistema de ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas de rango r forman un subespacio lineal de dimensión $d = n - r$ del espacio n-dimensional R_n, y viceversa, para cualquier subespacio lineal L de dimensión d del espacio R_n existe un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas de rango $r = n - d$, cuyas soluciones ocupan precisamente el subespacio L dado.

1308. Hallar alguna base y la dimensión de un subespacio lineal L del espacio R_n si L está dado mediante la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

1309. Demostrar que la dimensión del subespacio lineal L tendido sobre los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (es decir, un subespacio de todas las combinaciones lineales de dichos vectores), es igual al rango de la matriz, compuesta de las coordenadas de los vectores dados en alguna base, mientras que en calidad de base del subespacio L puede tomarse cualquier subsistema máximo linealmente independiente del sistema de dichos vectores.

Hallar la dimensión y base de los subespacios lineales, tendido sobre los siguientes sistemas de vectores:

1310. $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$.

1311. $a_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $a_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $a_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $a_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

Hallar los sistemas de ecuaciones lineales que prefijan los subespacios lineales, tendidos sobre los siguientes sistemas de vectores:

1312. $a_1 = (1, -1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 1)$, $a_3 = (2, 0, 1, 1)$.

1313. $a_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$, $a_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$, $a_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$.

1314. Demostrar que la suma y la intersección de dos subespacios lineales del espacio R_n son de por sí subespacios lineales del mismo espacio.

1315. Demostrar que la suma $S = L_1 + L_2$ de dos subespacios lineales del espacio R_n es igual a la intersección de todos los subespacios lineales de R_n que contienen tanto L_1, como también L_2.

1316. Demostrar que la suma de las dimensiones de dos subespacios lineales del espacio R_n es igual a la dimensión de la suma más la dimensión de la intersección de estos subespacios.

Hallar la dimensión s de la suma y la dimensión d de la intersección de los subespacios lineales: L_1 tendido sobre los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ y L_2, tendido sobre los vectores $b_1, b_2, \ldots, b_l$:

1317. $a_1 = (1, 2, 0, 1), a_2 = (1, 1, 1, 0); b_1 = (1, 0, 1, 0), b_2 = (1, 3, 0, 1)$.

1318. $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (1, 3, 1, 3)$; $b_1 = (1, 2, 0, 2), b_2 = (1, 2, 1, 2), b_3 = (3, 1, 3, 1)$.

1319*. Sean L_1 un subespacio lineal del espacio R_n con una base $a_1, a_2, \ldots, a_k$ y L_2 un subespacio lineal del mismo espacio con la base $b_1, b_2, \ldots, b_l$.

Demostrar las siguientes reglas de construcción de la base de la suma $S = L_1 + L_2$ y la base de la intersección $D = L_1 \cap L_2$:

1) Como base de la suma S sirve el subsistema máximo linealmente independiente del sistema de vectores $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$. Su construcción se reduce al cálculo del rango de la matriz formada de las coordenadas de ese último sistema de vectores.

2) La base de la suma S puede obtenerse, añadiendo a los vectores linealmente independientes $a_1, \ldots, a_k$ algunos de los vectores $b_1, \ldots, b_l$ (problema 659). Cambiando (si es necesario) el orden de los últimos vectores, puede considerarse que los vectores $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_{s-k}$ forman la base S.

La igualdad

$$x_1a_1 + \ldots + x_ka_k = y_1b_1 + \ldots + y_lb_l \tag{1}$$

es equivalente al sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con $k + l$ incógnitas $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ de rango s. Ya que las primeras s columnas de la matriz del sistema son linealmente independientes y, por consecuencia, por lo menos un menor de orden s en esas columnas es distinto de cero, entonces en calidad de las incógnitas independientes pueden tomarse las últimas $k + l - s = d$ incógnitas $y_{s-k+1}, \ldots, y_l$. Por eso puede hallarse el sistema fundamental de soluciones

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, \quad y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{il} \quad (i = 1, 2, \ldots, d) \tag{2}$$

para el sistema de ecuaciones (1) tal que

$$\begin{vmatrix} y_{1, s-k+1} & \cdots & y_{1, l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{d, s-k+1} & \cdots & y_{d, l} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{3}$$

entonces el sistema de vectores

$$c_i = \sum_{j=1}^{l} y_{ij} \boldsymbol{b}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, d) \tag{4}$$

es la base de la intersección $\boldsymbol{D}$.

Observación. Como $d = k + l - s$, esto da la segunda solución del problema 1316.

Hallar las bases de la suma y la intersección de los subespacios lineales, tendidos sobre los sistemas de vectores $a_1, \ldots, a_k$ y $b_1, \ldots, b_l$:

1320. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 3, 3)$; $\boldsymbol{b}_1 = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 1, -3)$.

1321. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 2, -3)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 0, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 3, 0, -4)$.

1322. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 2, 1, 2)$.

1323. Demostrar que si la dimensión de la suma de dos subespacios lineales del espacio $\boldsymbol{R}_n$ supera la dimensión de su intersección en una unidad, la suma coincide con uno de esos subespacios y la intersección con el otro.

1324. Sean $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ subespacios lineales del espacio $\boldsymbol{R}_n$. Demostrar que $\boldsymbol{L}$ será la suma directa de $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ cuando, y sólo cuando, se cumplan las condiciones:

a) $\boldsymbol{L}$ contiene $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$;

b) cada vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ se representa unívocamente en forma de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, donde $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$. En otras palabras, la suma $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ es suma directa si, y sólo si, para cualquier vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ la representación $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ donde $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$ es unívoca.

1325. Demostrar que la suma $\boldsymbol{S}$ de los subespacios lineales $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ será suma directa cuando, y sólo cuando, por lo menos un vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ se represente unívocamente como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, donde $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$.

1326. Supongamos que el subespacio lineal $\boldsymbol{L}$ es la suma directa de los subespacios lineales $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$. Demostrar que la dimensión de $\boldsymbol{L}$ es igual a la suma de las dimensiones de $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ con la particularidad de que cualesquiera bases de $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ dan juntas la base de ê.

1327. Demostrar que para cualquier subespacio lineal $\boldsymbol{L}_1$ del espacio $\boldsymbol{R}_n$ puede hallarse otro subespacio $\boldsymbol{L}_2$, tal que todo el espacio $\boldsymbol{R}_n$ sea la suma directa de $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$.

1328. Demostrar que el espacio $\boldsymbol{R}_n$ es la suma directa de dos subespacios lineales: $\boldsymbol{L}_1$, dado por la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, y $\boldsymbol{L}_2$, dado por un sistema de ecuaciones $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Hallar las proyecciones de los versores $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \ldots,$ sobre $\boldsymbol{L}_1$ paralelamente a $\boldsymbol{L}_2$ y sobre $\boldsymbol{L}_2$ paralelamente a $\boldsymbol{L}_1$.

1329. Demostrar que el espacio de todas las matrices cuadradas de orden n es la suma directa de los subespacios lineales L_1 de matrices simétricas y L_2 de matrices antisimétricas. Hallar las proyecciones de A_1 y A_2 de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

sobre L_1 paralelamente a L_2 y sobre L_2 paralelamente a L_1.

1330. Demostrar que las soluciones de cualquier sistema compatible de ecuaciones lineales con n incógnitas de rango r forman una variedad lineal del espacio R_n de dimensión $d = n - r$, y viceversa, para cualquier variedad lineal d-dimensional P del espacio R_n existe un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas de rango $r = n - d$, cuyas soluciones ocupan precisamente la variedad P dada.

1331. Supongamos que se dan dos variedades lineales (véase la introducción) $P_1 = L_1 + x_1$ y $P_2 = L_2 + x_2$, donde L_1, L_2 son subespacios lineales y x_1, x_2, vectores del espacio R_n. Demostrar que $P_1 = P_2$ cuando, y sólo cuando, $L_1 = L_2$ y $x_1 - x_2 \in L_1$. Así, pues, el espacio lineal, desplazando paralelamente el cual se obtiene dicha variedad, se determina unívocamente.

1332. Demostrar que si $P = L + x_0$, donde L es un subespacio lineal y x_0, un vector del espacio R_n, entonces el vector x_0 pertenece a la variedad P y después de sustituir este vector por cualquier vector $x \in P$ se obtiene la misma variedad P.

1333. Demostrar que si una recta tiene dos puntos comunes con la variedad lineal, ella está toda en esa variedad (en este caso el punto se identifica con el vector el cual tiene las mismas coordenadas que el punto, es decir, el cual va desde el origen de las coordenadas hacia el punto dado).

1334*. Demostrar que cualesquiera dos rectas del espacio R_n ($n \geqslant 3$) están en cierta variedad lineal tridimensional que yace en R_n.

1335. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas $x = a_0 + a_1t$ y $x = b_0 + b_1t$ del espacio R_n ($n > 1$) se encuentren en un mismo plano.

1336. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas $x = a_0 + a_1t$ y $x = b_0 + b_1t$ pasen por un mismo punto pero que no coincidan. Indicar el método de búsqueda del punto de intersección de esas rectas.

Hallar el punto de intersección de dos rectas $a_0 + a_1t$ y $b_0 + b_1t$:

1337. $a_0 = (2, 1, 1, 3, -3)$, $a_1 = (2, 3, 1, 1, -1)$; $b_0 = (1, 1, 2, 1, 2)$, $b_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$.

1338. $a_0 = (3, 1, 2, 1, 3)$, $a_1 = (1, 0, 1, 1, 2)$; $b_0 = (2, 2, -1, -1, -2)$, $b_1 = (2, 1, 0, 1, 1)$.

1339. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que a través de un punto, dado por el vector c, pueda trazarse la única

recta que interseque dos rectas dadas $x = a_0 + a_1 t$ y $x = b_0 + b_1 t$. Indicar el método de construcción de semejante recta y los puntos de intersección de ella con las rectas dadas.

Hallar una recta que pasa a través de un punto, dado por el vector c y que interseca las rectas $x = a_0 + a_1 t$, $x = b_0 + b_1 t$ y buscar los puntos de intersección de la recta buscada con las dos rectas dadas:

1340. $a_0 = (1, 0, -2, 1)$, $a_1 = (1, 2, -1, -5)$; $b_0 = (0, 1, 1, -1)$, $b_1 = (2, 3, -2, -4)$; $c = (8, 9, -11, -15)$.

1341. $a_0 = (1, 1, 1, 1)$, $a_1 = (1, 2, 1, 0)$; $b_0 = (2, 2, 3, 1)$, $b_1 = (1, 0, 1, 3)$; $c = (4, 5, 2, 7)$.

1342. Demostrar que cualesquiera dos planos del espacio R_n están en la variedad lineal de dimensión $\leqslant 5$.

1343. Demostrar que dos variedades lineales del espacio R_n de dimensiones k y l, respectivamente, están en la variedad lineal de dimensión $\leqslant k + l + 1$.

1344. Demostrar que si dos variedades lineales — P de dimensión k y Q de dimensión l— del espacio R_n tienen un punto común con la particularidad de que $k + l > n$, su intersección es una variedad lineal de dimensión $\geqslant k + l - n$. ¿Qué teoremas se desprenden de aquí para los espacios tridimensional y cuadridimensional?

1345. Describir todos los casos de la disposición mutua de dos planos $x = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2$ y $x = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2$ en un espacio n-dimensional y señalar las condiciones necesarias y suficientes para cada uno de estos casos.

1346. Sean

$$a_0, a_1, \ldots, a_k \qquad (1)$$

cualesquiera $k + 1$ vectores del espacio R_n. Demostrar que todos los vectores tipo

$$x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k, \qquad (2)$$

donde los números $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ satisfacen la condición

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1, \qquad (3)$$

forman una variedad lineal P, cuya dimensión es igual al rango del sistema de vectores

$$a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0. \qquad (4)$$

P es una variedad de dimensión mínima que contiene todos los vectores (1). El papel de a_0 lo puede desempeñar cualquiera de estos vectores. Viceversa, para cualquier variedad lineal k-dimensional P existe un sistema de $k + 1$ vectores (1), tal que P consta de todos los vectores tipo (2) a condición de (3), con la particularidad que el sistema de vectores (4) es linealmente independiente.

1347*. Se denomina *segmento con extremos en los puntos dados por los vectores a_1, a_2 del espacio R_n* el conjunto de todos los puntos, dados por los vectores tipo $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, donde $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ y $0 \leqslant$

$\leqslant \alpha_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$. El conjunto M de los puntos del espacio R_n se denomina *convexo* si para cualesquiera dos puntos de M todo el segmento con los extremos en dichos puntos está en M. Mostrar que la intersección de cualquier sistema de conjuntos convexos del espacio R_n es un conjunto convexo. Se llama *clausura convexa del conjunto dado A del espacio* R_n la intersección de todos los conjuntos convexos de R_n que están en A. Demostrar que la clausura convexa de un sistema finito de puntos pertenecientes a R_n, dados por los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$, consta de todos los puntos dados por los vectores tipo $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$, donde $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ y $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

1348*. Hallar la forma de un cuerpo en la sección de un paralelepípedo cuadridimensional (en caso del sistema cartesiano rectangular de coordenadas es un cubo cuadridimensional) $|x_i| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ por un hiperplano tridimensional con la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

1349*. Hallar la proyección de un tetraedro cuadridimensional, limitado por subespacios tridimensionales de coordenadas y el hiperplano $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, sobre el subespacio $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ paralelamente a la recta $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

1350*. Demostrar que la diagonal de un paralelepípedo n-dimensional se divide en n partes iguales por los puntos de intersección de ésta con las variedades lineales $(n - 1)$-dimensionales, trazadas por todos los vértices del paralelepípedo paralelamente a la variedad lineal, trazada por los extremos de todas las n aristas, cuyo origen coincide con uno de los extremos de dicha diagonal.

§ 17. Espacios unitarios y euclídeos

Se denomina espacio *euclídeo* (*unitario* respectivamente) R_n un espacio vectorial n-dimensional sobre el campo de los números reales (complejos, correspondientemente), en el cual a cada par de vectores x, y les corresponde un número real (complejo, correspondientemente) (x, y) que se denomina producto escalar de estos vectores, con la particularidad de que se cumplen las condiciones:

a) en caso del espacio euclídeo:

$$(x, y) = (y, x), \tag{1}$$

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \tag{2}$$

$$(\alpha x, y) = \alpha (x, y) \tag{3}$$

para cualquier número real α.

$$\text{Si } (x \neq 0, (x, x) > 0; \tag{4}$$

b) en caso del espacio unitario:

$$(x, y) = (\overline{y, x}), \tag{1'}$$

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \tag{2'}$$

lo que coincide con (2);

$$(\alpha x, y) = \alpha (x, y) \tag{3'}$$

para cualquier número complejo α.

$$\text{Si } x \neq 0, \ (x, x) > 0, \tag{4'}$$

lo que coincide con (4).

La base (o en general, un sistema de vectores) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ se denomina *ortonormal* si

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Si no hay otras indicaciones, se considera que las coordenadas de todos los vectores se toman en una base ortonormal.

Los vectores x e y se denominan ortogonales si $(x, y) = 0$.

Se denomina *proceso de ortogonalización* del sistema de vectores $a_1, a_2, \ldots, a_s$ el paso de este sistema al nuevo $b_1, b_2, \ldots, b_s$, construido de la siguiente manera:

$$b_1 = a_1; \quad b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i \quad (k = 2, 3, \ldots, s),$$

dondo $c_i = \frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, si $b_i \neq 0$, y c_i es cualquier número si $b_i = 0$.

El valor de c_i se obtiene, multiplicando la igualdad que expresa b_k a través de a_k y b_i $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, por b_i a condición de que $(b_k, b_i) = 0$.

1351. Demostrar que de las propiedades del producto escalar, señaladas en la introducción, se desprenden las siguientes propiedades:

a) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ para cualesquiera vectores del espacio euclídeo (unitario);

b) $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$ para cualesquiera vectores x, y del espacio euclídeo y cualquier número real α;

c) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha} (x, y)$ para cualesquiera vectores x, y, del espacio unitario y cualquier número complejo α;

d) $(x_1 - x_2, y) = (x_1, y) - (x_2, y)$;

e) $(x, 0) = 0$.

1352. ¿Qué propiedades debe poseer la forma bilineal $g = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ para que su valor con respecto a las coordenadas de cualesquiera dos vectores

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

de un espacio vectorial real R_n en cierta base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pueda tomarse como producto escalar de estos dos vectores que define el espacio euclídeo n-dimensional? ¿A qué son iguales los productos escalares de los vectores de la base escogida?

1353. Supongamos que se da una forma bilineal hermitiana $g = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y_j}$. La raya sobre la incógnita y_j significa que al sustituir y_j por su valor numérico α_j es necesario cambiar $\overline{y_j}$ por el valor complejo conjugado $\overline{\alpha_j}$. Supongamos que la matriz $A = (a_{ij})_1^n$ de

esta forma es hermitiana, o sea, $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Mostrar que los valores de la correspondiente forma cuadrática hermitiana $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{x_j}$ son reales para cualesquiera valores complejos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y si la forma f es determinada positiva, o sea, $f > 0$ para cualesquiera valores complejos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de los cuales no todos son nulos, entonces al definir el producto escalar mediante la igualdad $(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{y_j}$, donde $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ son las coordenadas de los vectores x e y, respectivamente, en cierta base $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio vectorial complejo R_n, dicho espacio se convierte en unitario con la particularidad de que cualquier espacio unitario puede obtenerse mediante este procedimiento.

1354. Demostrar que el producto escalar de cualesquiera dos vectores:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

del espacio euclídeo se expresa por la igualdad

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

cuando, y sólo cuando, la base de la cual se han tomado las coordenadas, es ortonormal.

1355. Sean L_1 y L_2 subespacios lineales de un espacio euclídeo (unitario) R_n con la particularidad de que la dimensión de L_1 es inferior a la de L_2; demostrar que en L_2 habrá un vector no nulo, ortogonal a todos los demás vectores de L_1.

1356. Demostrar que cualquier sistema de vectores no nulos ortogonales de dos en dos (por ejemplo, cualquier sistema ortonormal) es linealmente independiente.

Comprobar que los vectores de los siguientes sistemas son ortogonales de dos en dos y completarlos hasta las bases ortogonales:

1357. $(1, -2, 2, -3)$,
$(2, -3, 2, 4)$.

1358. $(1, 1, 1, -2)$,
$(1, 2, 3, -3)$.

Hallar los vectores que completan los siguientes sistemas de vectores hasta las bases ortonormales:

1359. $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,
$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

1360. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Aplicando el proceso de ortogonalización (véase la introducción), construir la base ortogonal del subespacio, tendido sobre el sistema de vectores dado:

1361. $(1, 2, 2, -1)$,
$(1, 1, -5, 3)$,
$(3, 2, 8, -7)$.

1362. $(1, 1, -1, -2)$,
$(5, 8, -2, -3)$,
$(3, 9, 3, 8)$.

1363. $(2, 1, 3, -1)$,
$(7, 4, 3, -3)$,
$(1, 1, -6, 0)$,
$(5, 7, 7, 8)$.

1364. Se denomina *complemento ortogonal del subespacio L del espacio R_n* el conjunto L^* de todos los vectores de R_n, cada uno de los cuales es ortogonal a todos los vectores de L.

Demostrar que:

a) L^* es un subespacio lineal del espacio R_n;

b) la suma de las dimensiones de L y L^* es igual a n;

c) el espacio R_n es la suma directa de los subespacios L y L^*.

1365. Demostrar que el complemento ortogonal al subespacio lineal del espacio R_n posee las propiedades:

a) $(L^*)^* = L$; b) $(L_1 + L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$;

c) $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* + L_2^*$; d) $R_n^* = O$, $O^* = R_n$.

Aquí O es un subespacio nulo que contiene sólo el vector nulo $\mathbf{0}$.

1366. Hallar la base del complemento ortogonal L^* del subespacio L, tendido sobre los vectores:

$$a_1 = (1, 0, 2, 1), \; a_2 = (2, 1, 2, 3), \; a_3 = (0, 1, -2, 1).$$

1367. El subespacio lineal L se da mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Hallar las ecuaciones que determinan el complemento ortogonal L^*.

1368. Mostrar que la representación del subespacio lineal L del espacio R_n y de su complemento ortogonal L^* en una base ortonormal están relacionadas de la siguiente manera: los coeficientes del sistema linealmente independiente de ecuaciones lineales, que determina uno de esos subespacios, sirven de coordenadas de los vectores de la base del otro subespacio.

1369. Sea L un subespacio lineal del espacio R_n. Demostrar que cualquier vector x perteneciente a R_n se representa unívocamente como $x = y + z$, donde y pertenece a L y z es ortogonal a L. y se denomina proyección ortogonal del vector x sobre el subespacio L, y z es la componente ortogonal de x con respecto a L. Indicar el procedimiento para calcular y y z.

Hallar la proyección ortogonal y y la componente ortogonal z del vector x sobre el subespacio lineal L:

1370. $x = (4, -1, -3, 4)$. L está tendido sobre los vectores $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$.

1371. $x = (5, 2, -2, 2)$. L está tendido sobre los vectores $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$.

1372. $x = (7, -4, -1, 2)$. L se determina mediante el sistema de ecuaciones

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0,$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0.$$

1373*. Se denomina *distancia desde el punto, dado por el vector* x, *hasta la variedad lineal* $P = L + x_0$ el mínimo de las distancias desde el punto dado hasta los puntos de la variedad, es decir, el mínimo de longitudes de los vectores $x - u$, donde u es un vector de P.

Demostrar que esta distancia es igual a la longitud de la componente ortogonal z del vector $x - x_0$ con respecto al subespacio lineal L, desplazando paralelamente el cual se obtiene la variedad P.

1374. Hallar la distancia desde el punto, determinado por el vector x, hasta la variedad lineal que se da mediante el sistema de ecuaciones:

a) $x = (4, 2, -5, 1)$;
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9,$$
$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12.$$

b) $x = (2, 4, -4, 2)$;
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2.$$

1375*. Demostrar que la distancia d desde el punto, determinado por el vector x, hasta la variedad lineal $P = L + x_0$, donde L es un subespacio lineal con la base $a_1, a_2, \ldots, a_k$, se calcula mediante el determinante de Gram (véase el problema 1415) según la fórmula

$$d^2 = \frac{G(a_1, a_2, \ldots, a_k, x - x_0)}{G(a_1, a_2, \ldots, a_k)}.$$

1376*. Se denomina distancia entre dos variedades lineales $P_1 = L_1 + x_1$ y $P_2 = L_2 + x_2$ el mínimo de las distancias de cualesquiera dos puntos, uno de los cuales pertenece a P_1 y el otro, a P_2. Demostrar que esta distancia es igual a la longitud de la componente ortogonal del vector $x_1 - x_2$ con respecto al subespacio lineal $L = L_1 + L_2$.

1377. Hallar la distancia entre dos planos $x = a_1t_1 + a_2t_2 + x_1$ y $x = a_3t_1 + a_4t_2 + x_2$, donde

$$a_1 = (1, 2, 2, 2), \quad a_2 = (2, -2, 1, 2),$$
$$a_3 = (2, 0, 2, 1), \quad a_4 = (1, -2, 0, -1);$$
$$x_1 = (4, 5, 3, 2), \quad x_2 = (1, -2, 1, -3).$$

1378*. Se denomina símplice n-dimensional regular de un espacio euclídeo R_p $(p \geqslant n)$ una clausura convexa (véase el problema 1347) del sistema de $n + 1$ puntos que se encuentran uno de otro a distancia igual. Los puntos del sistema dado se denominan vértices; los segmen-

tos que los unen, aristas, y las clausuras convexas de los subsistemas de $k+1$ puntos del sistema dado se llaman facetas k-dimensionales del símplice. Dos facetas se denominan opuestas si no tienen vértices comunes y cualquiera de las $n+1$ vértices del símplice es el vértice de una de esas facetas.

Hallar la distancia entre dos facetas opuestas de dimensiones k y $n-k-1$ de un símplice n-dimensional, con las aristas cuya longitud es igual a la unidad, y demostrar qué dicha distancia es igual a la de entre los centros de esas facetas.

1379*. Sea e un vector de longitud igual a la unidad del espacio euclídeo (o unitario) R_n. Demostrar que cualquier vector x perteneciente a R_n se representa unívocamente como $x=\alpha e+z$, donde $(z, e)=0$. El número α se llama proyección del vector x sobre la dirección de e y se designa por $\mathrm{pr}_e x$.

Demostrar que:

a) $\mathrm{pr}_e (x+y)=\mathrm{pr}_e x+\mathrm{pr}_e y$; b) $\mathrm{pr}_e (\lambda x)=\lambda\, \mathrm{pr}_e x$; c) $\mathrm{pr}_e x= (x, e)$; d) para cualquier base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ y cualquier vector x se cumple la igualdad $x=\sum\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{pr}_{e_i} x)\cdot e_i$.

1380*. Sea $e_1, \ldots, e_k$ un sistema ortonormal de vectores del espacio euclídeo R_n. Demostrar que para cualquier vector x de R_n tiene lugar la desigualdad (desigualdad de Bessel)

$$\sum_{i=1}^{k} (pr_{e_i} x)^2 \leqslant |x|^2,$$

con la particularidad de que esta desigualdad se convierte en igualdad (igualdad de Parseval) para cualquier x perteneciente a R_n cuando, y sólo cuando, $k=n$, o sea, el sistema $e_1, \ldots, e_k$ es una base ortonormal.

1381*. Demostrar la desigualdad de Cauchy—Buniakovski

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

para cualesquiera vectores x e y del espacio euclídeo con la particularidad de que el signo de igualdad surge si, y sólo si, los vectores x e y son linealmente dependientes.

1382*. Demostrar la desigualdad de Cauchy—Buniakovski

$$(x, y)(y, x) \leqslant (x, x)(y, y)$$

para cualesquiera vectores x e y del espacio unitario con la particularidad de que el signo de igualdad aparece cuando, y sólo cuando, los vectores x e y son linealmente dependientes.

1383. Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, demostrar las siguientes desigualdades:

a) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2$

para cualesquiera números reales $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ (véase el problema 503);

b) $$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{b}_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$$

para cualesquiera números complejos $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ (véase el problema 505).

1384. En un espacio vectorial de dimensión infinita de todas las funciones reales, continuas en el segmento $[a, b]$ con las corrientes adición de las funciones y multiplicación de la función por un número, se da un producto escalar $(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$. Comprobar la verificación de todas las propiedades del producto escalar del espacio euclídeo (véase la introducción) y escribir la desigualdad de Cauchy—Buniakovski para este espacio.

Hallar las longitudes de los lados y los ángulos interiores de los triángulos, cuyos vértices están dados por sus coordenadas:

1385. $A(2, 4, 2, 4, 2)$, $B(6, 4, 4, 4, 6)$, $C(5, 7, 5, 7, 2)$.

1386. $A(1, 2, 3, 2, 1)$; $B(3, 4, 0, 4, 3)$; $C\left(1+\frac{5}{26}\sqrt{78},\ 2+\frac{5}{13}\sqrt{78},\ 3+\frac{10}{13}\sqrt{78},\ 2+\frac{5}{13}\sqrt{78},\ 1+\frac{5}{26}\sqrt{78}\right)$.

1387. Demostrar la siguiente generalización del teorema de las matemáticas elementales sobre dos perpendiculares: si el vector x del espacio euclídeo (o unitario) es ortogonal a cada uno de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$, es también ortogonal a cualquier vector del subespacio lineal L, tendido sobre los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

1388. Demostrar que si $x = \alpha y$, $|x| = |\alpha| \cdot |y|$. Aquí $|x|$, $|y|$ son las longitudes de los vectores x, y, respectivamente.

1389*. Demostrar que el cuadrado de la diagonal de un paralelogramo n-dimensional es igual a la suma de los cuadrados de sus aristas que salen de un mismo vértice (la generalización n-dimensional del teorema de Pitágoras).

1390*. Demostrar el teorema de que la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

1391. Aplicando la multiplicación escalar de los vectores, demostrar el teorema de que el cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los dos otros lados sin el producto duplicado de estos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

1392. Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, demostrar la desigualdad de un triángulo: si $\rho(X, Y)$ es la distancia entre los puntos X e Y, para cualesquiera tres puntos A, B y C tenemos $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$ con la particularidad de

que la igualdad surge cuando, y sólo cuando, el vector x trazado de A a B, e y, trazado de B a C, son colineales y tienen la misma dirección.

1393. Hallar la cantidad de diagonales de un cubo n-dimensional, ortogonales a la diagonal dada.

1394. Hallar la longitud de la diagonal de un cubo n-dimensional con la arista a y el límite de esa longitud para $n \to \infty$.

1395. Demostrar que todas las diagonales de un cubo n-dimensional forman un mismo ángulo φ_n con todas sus aristas. Hallar este ángulo y su límite para $n \to \infty$. ¿Para qué valor de n obtendremos $\varphi_n = 60°$?

1396. Hallar la expresión para el radio R de una esfera, circunscrita alrededor de un cubo n-dimensional, a través de la arista a; ¿cuál de estas magnitudes R y a es más grande para diferentes n?

1397. Demostrar que la proyección ortogonal de cualquier arista de un cubo n-dimensional sobre cualquier diagonal de este cubo es igual, según su valor absoluto, a $1/n$ de la longitud de la diagonal.

1398*. Demostrar que las proyecciones ortogonales de los vértices de un cubo n-dimensional sobre cualquiera de sus diagonales, la dividen en n partes iguales.

1399*. Sean x, y vectores no nulos de un espacio euclídeo R_n. Demostrar que:

a) $x = \alpha y$, donde $\alpha > 0$ cuando, y sólo cuando, el ángulo entre x e y es cero;

b) $x = \alpha y$, donde $\alpha < 0$, cuando, y sólo cuando, el ángulo entre x e y es igual a π.

1400*. Demostrar que entre todos los vectores del subespacio lineal L el ángulo mínimo con el vector x dado lo forma la proyección ortogonal y del vector x sobre L. En este caso, la igualdad $\cos(x, y) = \cos(x, y')$, donde $y' \in L$, se cumple cuando, y sólo cuando, $y' = \alpha y$, donde $\alpha > 0$.

1401. Hallar el ángulo entre la diagonal de un cubo n-dimensional y su faceta k-dimensional.

Hallar el ángulo entre el vector x y el subespacio lineal tendido sobre los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

1402. $x = (2, 2, 1, 1)$;
$a_1 = (3, 4, -4, -1)$,
$a_2 = (0, 1, -1, 2)$.

1403. $x = (1, 0, 3, 0)$;
$a_1 = (5, 3, 4, -3)$,
$a_2 = (1, 1, 4, 5)$,
$a_3 = (2, -1, 1, 2)$.

1404. Se denomina *ángulo* entre dos subespacios lineales L_1 y L_2 del espacio euclídeo R_n que no tienen vectores no nulos comunes, el mínimo de los ángulos entre los vectores no nulos x_1, x_2, donde $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Si la intersección $L_1 \cap L_2 = D \neq 0$, con la particularidad de que $D \neq L_1$, $D \neq L_2$, se llama ángulo entre L_1 y L_2 al ángulo entre sus intersecciones con el complemento ortogonal D^* e la intersección D. Si uno de los subespacios contiene el otro (por

ejemplo, si los dos coinciden), el ángulo entre ellos se considera igual a cero. Se denomina ángulo entre variedades lineales el ángulo entre los subespacios que les corresponden. Mostrar que el ángulo entre cualesquiera subespacios o variedades siempre está definido y es igual a cero cuando, y sólo cuando, uno de los subespacios o variedades contiene el otro o las variedades son paralelas.

1405*. Hallar el ángulo entre las facetas bidimensionales $A_0A_1A_2$ y $A_0A_3A_4$ de un símplice cuadridimensional regular (véase el problema 1378) $A_0A_1A_2A_3A_4$.

1406*. Hallar el ángulo entre las superficies $\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1t_1 + \boldsymbol{a}_2t_2$ y $\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1t_1 + \boldsymbol{b}_2t_2$, donde

$$\boldsymbol{a}_0 = (3, 1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, 0),$$
$$\boldsymbol{b}_0 = (2, 1, 1, 3), \quad \boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \boldsymbol{b}_2 = (1, -1, 1, -1).$$

1407*. Supongamos que se da un sistema linealmente independiente de vectores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_s$ y dos sistemas ortogonales de vectores no nulos $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_s$ y $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_s$, tales que los vectores $\boldsymbol{f}_k$ y $\boldsymbol{g}_k$ se expresan linealmente a través de $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Demostrar que $\boldsymbol{f}_k = \alpha_k\boldsymbol{g}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$, donde $\alpha_k \neq 0$.

1408*. Sea $\boldsymbol{R}_{n+1}$ un espacio euclídeo, en el cual a título de vectores se toman todos los polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales respecto a una indeterminada x y el producto escalar de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ se determina así: $(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)\, g(x)\, dx$.

Demostrar que los siguientes polinomios, conocidos bajo el nombre de polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1, \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k] \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

forman una base ortogonal del espacio $\boldsymbol{R}_{n+1}$.

1409. Partiendo de la definición de los polinomios de Legendre, dada en el problema anterior, hallar los polinomios $P_k(x)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Cerciorarse de que $P_k(x)$ tiene el grado k y escribir la expresión ampliada según los grados de x, para $P_k(x)$ siendo k cualquiera.

1410*. Calcular la «longitud» del polinomio de Legendre $P_k(x)$ como un vector del espacio euclídeo $\boldsymbol{R}_{n+1}$ del problema 1408.

1411*. Calcular el valor del polinomio de Legendre $P_k(x)$ para $x = 1$.

1412*. Demostrar que si a la base $1, x, x^2, \ldots, x^n$ del espacio euclídeo $\boldsymbol{R}_{n+1}$ del problema 1408 se le aplica el proceso de ortogonalización, se obtendrán polinomios $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ que se diferencian de los correspondientes polinomios de Legendre sólo por factores constantes. Hallar dichos factores.

1413. Supongamos que el proceso de ortogonalización traslada los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ a los vectores $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, res-

pectivamente. Demostrar que b_k es una componente ortogonal del vector a_k con respecto al subespacio lineal L_{k-1}, tendido sobre $a_1, \ldots, a_{k-1}$ $(k > 1)$. Prosiguiendo, demostrar que

$$0 \leqslant |b_k| \leqslant |a_k| \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

con la particularidad de que $|b_k| = 0$ cuando, y sólo cuando a_k se expresa linealmente a través de $a_1, \ldots, a_{k-1}$ $(k > 1)$ ó $a_1 = 0$ $(k = 1)$; $|b_k| = |a_k|$ cuando, y sólo cuando, $(a_k, a_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1;\ k > 1)$ ó $k = 1$.

1414*. Demostrar que la integral $\int\limits_{-1}^{+1} [f(x)]^2\,dx$, donde $f(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales y el coeficiente mayor igual a la unidad, alcanza su mínimo, igual a $\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(C_{2n}^n)^2}$, cuando, y sólo cuando, $f(x) = \frac{2^n}{C_{2n}^n} P_n(x)$, donde $P_n(x)$ es el polinomio de Legendre de grado n (véase el problema 1408).

1415. El determinante

$$g(a_1, \ldots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}$$

se denomina determinante de Gram de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ del espacio euclídeo (o unitario) R_n.

Demostrar que el determinante de Gram no varía, al aplicar a los vectores $a_1, \ldots, a_k$ el proceso de ortogonalización, es decir, si como resultado de la ortogonalización, los vectores $a_1, \ldots, a_k$ se convertirán en vectores $b_1, \ldots, b_k$, entonces

$$g(a_1, \ldots, a_k) = g(b_1, \ldots, b_k) = (b_1, b_1)(b_2, b_2)\ldots(b_k, b_k).$$

Haciendo uso de esto, aclarar el sentido geométrico de $g(a_1, a_2)$ y $g(a_1, a_2, a_3)$, suponiendo que los vectores son linealmente independientes.

1416*. Demostrar que para que los vectores $a_1, \ldots, a_k$ del espacio euclídeo (o unitario) sean linelamente dependientes, es necesario y suficiente que el determinante de Gram de estos vectores sea nulo.

1417*. Dos bases $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_n$ del espacio euclídeo (o unitario) se denominan recíprocas si

$$(e_i, f_j) = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Demostrar que para cualquier base $e_1, \ldots, e_n$ existe una base recíproca y ésta se determina unívocamente.

1418. Sea S una matriz del cambio de la base $e_1, \ldots, e_n$ por la base $e'_1, \ldots, e'_n$. Hallar la matriz T del cambio de la base $f_1, \ldots, f_n$, recíproca de $e_1, \ldots, e_n$, por la base $f'_1, \ldots, f'_n$, recíproca de $e'_1, \ldots, e'_n$:

a) en un espacio euclídeo; b) en un espacio unitario.

1419*. Demostrar que el determinante de Gram $g(a_1, \ldots, a_k)$ es nulo si los vectores $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente dependientes, y es positivo si éstos son linealmente independientes.

1420. Demostrar que si los vectores $a_1, \ldots, a_n$ linealmente independientes se transforman mediante el proceso de ortogonalización en los vectores $b_1, \ldots, b_n$, entonces $|b_k|^2 = \frac{g(a_1, \ldots, a_k)}{g(a_1, \ldots, a_{k-1})}$ $(k = 1, 2, \ldots, n$; el determinante de Gram con el número nulo de vectores se toma igual a la unidad).

1421*. En un espacio de polinomios, cuyo grado no supera a n, con respecto a una indeterminada x con coeficientes reales, el producto escalar se prefija mediante la igualdad $(f, g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$.

Hallar la distancia entre el origen de las coordenadas y la variedad lineal que consta de todos los polinomios de grado n con el coeficiente mayor igual a la unidad.

1422*. Demostrar que para el determinante de Gram es válida la desigualdad

$$0 \leqslant g(a_1, \ldots, a_k) \leqslant |a_1|^2 \ldots |a_k|^2,$$

con la particularidad de que $g(a_1, \ldots, a_k) = 0$ cuando, y sólo cuando, los vectores $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente dependientes, y $g(a_1, \ldots, a_k) = |a_1|^2 \ldots |a_k|^2$ cuando, y sólo cuando, bien los vectores $a_1, \ldots, a_k$ son ortogonales de dos en dos, o bien por lo menos uno de esos vectores es nulo.

1423. Haciendo uso del problema anterior, demostrar la desigualdad de Hadamard, a saber: si $D = |a_{ij}|_1^n$ es un determinante con elementos reales, entonces $D^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ (véase el problema 923), con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar cuando, y sólo cuando, bien

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

o bien el determinante D contiene una fila nula. ¿Cómo cambiará la afirmación para un determinante con elementos complejos?

1424*. Demostrar que el determinante D_f de la forma cuadrática determinada positiva $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ satisface la igualdad $D_f \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1425*. Demostrar que cualquier matriz simétrica real $A = (a_{ij})_1^n$ cuyos menores principales son no negativos, es la matriz de Gram, es decir, existe un sistema de vectores $e_1, \ldots, e_n$ del espacio euclídeo R_n, tal que

$$(e_i, e_j) = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

1426*. Demostrar que cualquier matriz hermitiana $A = (a_{ij})_1^n$, cuyos menores principales son no negativos, es la matriz de Gram, o sea, existe un sistema de vectores $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio unitario R_n, tal que

$$(e_i, e_j) = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

1427*. Determinemos el volumen de un paralelepípedo n-dimensional —construido en los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ linealmente independientes, del espacio euclídeo— de modo inductivo mediante las condiciones:

1) $V(a_1) = |a_1|$;

2) $V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot h_n$, donde h_n es la longitud de la componente ortogonal del vector a_n con respecto al subespacio, tendido sobre los vectores $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Demostrar que

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{g(a_1, \ldots, a_n)} = |D|,$$

donde D es un determinante formado de las coordenadas de los vectores dados en alguna base ortonormal del espacio n-dimensional, tendido sobre los vectores $a_1, \ldots, a_n$.

1428*. Demostrar que el volumen del paralelepípedo n-dimensional no supera al producto de las longitudes de sus aristas que salen de un vértice, y es igual a dicho producto cuando, y sólo cuando, estas aristas son ortogonales de dos en dos, es decir, cuando el paralelepípedo es un paralelogramo.

1429*. Demostrar la siguiente propiedad del determinante de Gram:

$$g(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) \leqslant g(a_1, \ldots, a_k)\, g(b_1, \ldots, b_l) \qquad (1)$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar cuando, y sólo cuando, bien

$$(a_i, b_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k; \;\; j = 1, 2, \ldots, l) \qquad (2)$$

o bien por lo menos uno de los subsistemas $a_1, \ldots, a_k$ y $b_1, \ldots, b_l$ es linealmente dependiente.

1430*. Demostrar la siguiente propiedad del volumen de un paralelepípedo: $V(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_l) \leqslant V(a_1, \ldots, a_k) \times V(b_1, \ldots, b_l)$ con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar cuando, y sólo cuando, $(a_i, b_j) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, l)$.

1431*. Demostrar que si A es una matriz simétrica real de orden n con menores principales no negativos, A_1 es una matriz de orden

$k < n$ en el ángulo superior izquierdo y A_2, una matriz de orden $n - k$ en el ángulo inferior derecho de la matriz A, $|A| \leqslant |A_1| \times \times |A_2|$ (compárese con el problema 922).

1432*. Resolver el problema, análogo al anterior, si A es una matriz hermitiana con menores principales no negativos.

1433*. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que C_{n+1}^2 números positivos

$$a_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n; \ i > j) \tag{1}$$

sean:

a) distancias de todos los posibles pares de vértices de cierto símplice n-dimensional de un espacio euclídeo R_n (es decir, del sistema de $n + 1$ puntos que no yacen en una variedad lineal $(n - 1)$-dimensional);

b) distancias de todos los posibles pares de puntos de cierto sistema de $n + 1$ puntos del espacio euclídeo R_n.

§ 18. Transformaciones lineales de los espacios vectoriales arbitrarios

En este párrafo, a cierta excepción, se examinan transformaciones lineales de los espacios vectoriales afines. Las transformaciones de los espacios euclídeos y unitarios se estudian en el siguiente párrafo.

Las transformaciones lineales se indican con la notación φ, ψ, etc., la imagen del vector x durante la transformación φ, con φx, el sistema de vectores $\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n$, con $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Se denomina matriz de la transformación lineal φ en la base $e_1, \ldots, e_n$ una matriz A_φ, cuyas columnas se forman de las coordenadas de las imágenes de la base $\varphi e_1, \ldots, \varphi e_n$ en la misma base $e_1, \ldots, e_n$; en otras palabras, la matriz A_φ se determina mediante la igualdad

$$\varphi(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_n) A_\varphi. \tag{1}$$

Sea T la matriz del cambio de la base $e_1, \ldots e_n$ por la base $f_1, \ldots, f_n$ (véase la introducción al § 16), A_φ y B_φ son las matrices de la transformación φ en la primera y segunda bases, respectivamente. Entonces tiene lugar la relación

$$B_\varphi = T^{-1} A_\varphi T. \tag{2}$$

Las coordenadas $y_1, \ldots, y_n$ de la imagen φx del vector x para la transformación lineal φ se expresan mediante las coordenadas de $x_1, \ldots, x_n$ de la preimagen de x en la misma base con ayuda de la matriz $A_\varphi = (a_{ij})_1^n$ de la transformación lineal φ en la misma base de la siguiente manera: $y_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ o en la anotación matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Se denominan suma de $\varphi + \psi$, producto de $\varphi\psi$ de dos transformaciones lineales φ y ψ y producto de $\alpha\varphi$ del número α por la transformación lineal φ del

espacio R_n las transformaciones que se determinan respectivamente por las igualdades

$$(\varphi + \psi)\, x = \varphi x + \psi x,\quad (\varphi\psi)\, x = \varphi\, (\psi x),\quad (\alpha\varphi)\, x = \alpha\, (\varphi x),$$

para cualquier vector x del espacio R_n.

1434. Demostrar que el giro del plano en un ángulo α alrededor del origen de coordenadas es una transformación lineal y hallar la matriz de esta transformación en cualquier base ortonormal si la dirección positiva de la lectura de los ángulos coincide con la del giro más corto que transforma el primer vector básico en el segundo.

1435. Demostrar que el giro de un espacio tridimensional en un ángulo $2\pi/3$ alrededor de una recta, prefijada en un sistema rectangular de coordenadas mediante las ecuaciones $x_1 = x_2 = x_3$, es una transformación lineal y hallar la matriz de esta transformación en la base de versores e_1, e_2, e_3 de los ejes de coordenadas.

1436. Demostrar que la proección de un espacio tridimensional sobre el eje de coordenadas del vector e_1 paralelamente al plano de coordenadas de los vectores e_2 y e_3 es una transformación lineal y hallar su matriz en la base de e_1, e_2, e_3.

1437. Demostrar que la proyección de un espacio tridimensional sobre el plano de coordenadas de los vectores e_1, e_2 paralelamente al eje de coordenadas del vector e_3 es una transformación lineal y hallar su matriz en la base de e_1, e_2, e_3.

1438. Demostrar que la proyección ortogonal de un espacio tridimensional sobre el eje que forma ángulos iguales con los ejes de un sistema rectangular de coordenadas, es una transformación lineal y hallar su matriz en la base de los versores de los ejes de coordenadas.

1439. Sea el espacio R_n una suma directa de los subespacios lineales L_1 con la base $a_1, \ldots, a_k$ y L_2 con la base $a_{k+1}, \ldots, a_n$. Demostrar que la proyección del espacio sobre L_1 paralelamente a L_2 es una transformación lineal y hallar la matriz de dicha transformación en la base $a_1, \ldots, a_n$.

1440. Demostrar que existe la única transformación lineal del espacio R_n que convierte los vectores linealmente independientes $a_1, \ldots, a_n$ dados en los vectores $b_1, \ldots, b_n$ dados. ¿De qué modo hallar la matriz de esta transformación en la base $a_1, \ldots, a_n$?

Aclarar cuáles de las siguientes transformaciones φ, prefijadas mediante la representación de las coordenadas del vector φx como funciones de las coordenadas del vector x, son lineales, y en caso de la linealidad, hallar sus matrices en la misma base en la que se dan las coordenadas de los vectores x y φx.

1441. $\varphi x = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$.

1442. $\varphi x = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2)$.

1443. $\varphi x = (2x_1 + x_2,\ x_1 + x_3,\ x_3^2)$.

1444. $\varphi x = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3,\ x_2)$.

Demostrar que existe la única transformación lineal de un espacio tridimensional que convierte los vectores a_1, a_2, a_3 en b_1, b_2, b_3,

respectivamente, y hallar la matriz de esta transformación en la misma base, en la cual se dan las coordenadas de todos los vectores:

1445. $a_1 = (2, 3, 5)$, $b_1 = (1, 1, 1)$,
$a_2 = (0, 1, 2)$, $b_2 = (1, 1, -1)$,
$a_3 = (1, 0, 0)$, $b_3 = (2, 1, 2)$.

1446. $a_1 = (2, 0, 3)$, $b_1 = (1, 2, -1)$,
$a_2 = (4, 1, 5)$, $b_2 = (4, 5, -2)$,
$a_3 = (3, 1, 2)$, $b_3 = (1, -1, 1)$.

1447. Supongamos que la transformación lineal φ del espacio R_n convierte los vectores linealmente independientes $a_1, \ldots, a_n$ en vectores $b_1, \ldots, b_n$, respectivamente. Demostrar que la matriz A_φ de dicha transformación en cierta base $e_1, \ldots, e_n$ puede hallarse de la igualdad $A_\varphi = BA^{-1}$, donde las columnas de las matrices A y B constan de las coordenadas de los vectores $a_1, \ldots, a_n$ y de $b_1, \ldots, b_n$, respectivamente, en la base $e_1, \ldots, e_n$.

1448. Demostrar que la transformación de un espacio tridimensional $\varphi x = (x, a)\, a$, donde $a = (1, 2, 3)$, es una transformación lineal y hallar sus matrices en una base ortonormal e_1, e_2, e_3, en la cual se dan las coordenadas de todos sus vectores, y en la base de $b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (2, 0, -1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$.

1449. Mostrar que las multiplicaciones de las matrices cuadradas de segundo orden a) a la izquierda, b) a la derecha por una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dada son transformaciones lineales del espacio de todas las matrices de segundo orden, y hallar las matrices de estas transformaciones en la base que consta de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1450. Mostrar que la diferenciación es una transformación lineal de un espacio de todos los polinomios de grado $\leqslant n$ con respecto a una indeterminada con coeficientes reales.

Hallar la matriz de esta transformación en la base:

a) $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

b) $1, x-c, \frac{(x-c)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x-c)^n}{n!}$, donde c es un número real.

1451. ¿Cómo cambiará la matriz de una transformación lineal si en la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ se permutan de lugar dos vectores e_i, e_j?

1452. La transformación lineal φ en la base e_1, e_2, e_3, e_4 tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz de la misma transformación en la base:

a) e_1, e_2, e_3, e_4;

b) e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

1453. La transformación lineal φ en la base e_1, e_2, e_3 tiene una matriz

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hallar su matriz en la base

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,\ f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3,\ f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

1454. La transformación lineal φ en la base $a_1 = (8, -6, 7)$, $a_2 = (-16, 7, -13)$, $a_3 = (9, -3, 7)$ tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Hallar su matriz en la base

$$b_1 = (1, -2, 1),\ b_2 = (3, -1, 2),\ b_3 = (2, 1, 2).$$

1455. Demostrar que las matrices de una misma transformación en dos bases coinciden cuando, y sólo cuando, la matriz del cambio de una de esas bases por otra es conmutativa con la matriz de dicha transformación lineal en una de las bases dadas.

1456. Demostrar que cualquier transformación lineal φ de un espacio unidimensional se reduce a la multiplicación de todos los vectores por un mismo número, es decir, $\varphi x = \alpha x$, para cualquier vector x.

1457. Supongamos que la transformación φ en la base $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. La transformación ψ en la base $b_1 = (3, 1)$, $b_2 = (4, 2)$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Hallar la matriz de transformación $\varphi + \psi$ en la base b_1, b_2.

1458. La transformación φ en la base $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, y la transformación ψ en la base $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, 6)$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Hallar la matriz de transformación $\varphi\psi$ en la misma base en la que se dan las coordenadas de todos los vectores.

1459. Sea φ una transformación lineal de un espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales, que pasa cada polinomio a su derivada. Mostrar que $\varphi^{n+1} = 0$.

1460. Sean φ una transformación lineal de diferenciación y ψ la multiplicación por x en un espacio de dimensión infinita de todos los polinomios con respecto a x con coeficientes reales.
Demostrar que $\varphi\psi^n - \psi^n\varphi = n\psi^{n-1}$.

1461. Mostrar que las transformaciones lineales de un espacio n-dimensional con respecto a la adición y multiplicación por un número forman de por sí un espacio vectorial. Hallar la dimensión de ese espacio.

1462. La transformación lineal φ del espacio R_n se denomina *regular* si su matriz A_φ en alguna (lo que significa que en cualquiera) base es regular, es decir, $|A_\varphi| \neq 0$. Demostrar que esta definición es equivalente a cada una de las siguientes: la transformación lineal φ es regular si: a) de $\varphi x = 0$ se desprende que $x = 0$; b) al transformar φ cualquier base del espacio pasa de nuevo a la base; c) la transformación de φ es biunívoca, o sea, si $x_1 \neq x_2$, entonces $\varphi x_1 \neq \varphi x_2$; d) φ aplica el espacio sobre todo el espacio, o sea, para cualquier $y \in R_n$ se encontrará $x \in R_n$, tal que $\varphi x = y$; e) φ posee una transformación inversa ψ, es decir, $\psi(\varphi x) = x$ para cualquier $x \in R_n$.

1463. Sean x un vector propio de la transformación lineal φ el cual pertenece al valor propio de λ, y $f(t)$ un polinomio. Demostrar que el mismo vector x será un vector propio de la transformación $f(\varphi)$, perteneciente al valor propio de $f(\lambda)$. En otras palabras, demostrar que de $\varphi x = \lambda x$ se desprende que $f(\varphi)x = f(\lambda)x$.

1464*. Sean x un vector propio de la transformación lineal φ perteneciente al valor propio de λ, y $f(t)$ una función para la cual la transformación $f(\varphi)$ tiene sentido (si φ en cierta base tiene una matriz A, entonces $f(\varphi)$ se determina en la misma base mediante la matriz $f(A)$ con la particularidad de que puede demostrarse que $f(\varphi)$ no depende de la elección de la base). Demostrar que el mismo vector x será propio de la transformación $f(\varphi)$, perteneciente al valor propio de $f(\lambda)$.

Hallar los valores y vectores propios de las transformaciones lineales, prefijados en cierta base mediante las matrices:

1465. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **1466** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1467 $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **1468.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

1469. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **1470** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

1471. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **1472** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1473. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ **1974.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

1475. Demostrar que los vectores propios de una transformación lineal, pertenecientes a diversos valores propios, son linealmente independientes.

1476. Demostrar que cualquier matriz cuadrada A con distintos números característicos, es semejante a una matriz diagonal (sobre un campo que contiene tanto elementos de la matriz, como también sus números característicos).

1477. Demostrar que si la transformación lineal φ del espacio R_n tiene n diferentes valores propios, cualquier transformación lineal ψ conmutativa con φ, posee una base de vectores propios con la particularidad de que cualquier vector propio de φ será propio también para ψ.

1478. Demostrar que una matriz de la transformación lineal en cierta base es diagonal cuando, y sólo cuando, la base consta de los vectores propios de dicha transformación.

Aclarar cuáles de las siguientes matrices de las transformaciones lineales pueden reducirse a la forma diagonal, pasando a la nueva base. Hallar esa base y la matriz correspondiente a ella:

1479. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$ **1480.** $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

1481. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

1482. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$ **1483.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

1484*. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de orden n hallar una matriz regular T para la cual la matriz $B = T^{-1}AT$ sea diagonal, y hallar esa matriz B.

1485. Se denomina *polinomio mínimo para el vector x* con relación a la transformación lineal φ el polinomio $g_x(\lambda)$ con el coeficiente mayor igual a la unidad que posee el grado mínimo entre todos los

polinomios que anulan, para x con respecto a φ, es decir, los polinomios $f(\lambda)$ con la propiedad $f(\varphi)x = 0$.

Se determina de modo análogo el polinomio $g(\lambda)$ con relación a la transformación lineal φ para todo el espacio. Demostrar que el polinomio mínimo $g(\lambda)$ de la transformación lineal φ es igual al mínimo común múltiplo de los polinomios mínimos para los vectores de cualquier base del espacio con respecto a φ.

1486*. Hallar las condiciones para las cuales la matriz A que posee en la diagonal secundaria los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y en los demás lugares ceros, es semejante a la matriz diagonal.

1487. Hallar los valores y vectores propios de una transformación lineal que es la diferenciación de los polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales.

1488. Sea φ una transformación lineal del espacio R_n. El conjunto de todos los vectores φx, donde x es cualquier vector perteneciente a R_n, se denomina *imagen de R_n para la transformación φ* o *campo de valores* de φ. El conjunto de todos los vectores x pertenecientes a R_n, tales que $\varphi x = 0$, se denomina *preimagen completa de cero para la transformación* φ o *núcleo* de φ. Demostrar que: a) el campo de valores de φ es un subespacio lineal R_n cuya dimensión es igual al rango de φ; b) el núcleo de φ es el subespacio lineal del espacio R_n, cuya dimensión es igual al defecto de φ, es decir, a la diferencia entre n y el rango de φ.

1489. Sean φ una transformación lineal y L un subespacio del espacio R_n. Demostrar que: a) la imagen φL y b) la preimagen completa $\varphi^{-1}L$ del subespacio L son de nuevo subespacios para la transformación lineal φ.

1490. Demostrar que para una transformación lineal regular φ del espacio R_n la dimensión: a) de la imagen φL y b) de la preimagen completa $\varphi^{-1}L$ de cualquier transformación lineal L es igual a la dimensión de L.

1491*. Designemos la dimensión del subespacio lineal L por dim. L y el defecto de la transformación lineal φ por el def. φ. Demostrar que las dimensiones de la imagen y la preimagen completa del subespacio L del espacio R_n para la transformación φ satisfacen las desigualdades:

a) dim. $L -$ def. $\varphi \leqslant$ dim. $\varphi L \leqslant$ dim. L;

b) dim. $L \leqslant$ dim. $\varphi^{-1}L \leqslant$ dim. $L +$ def. φ.

1492*. Haciendo uso del problema anterior, demostrar las desigualdades de Sylvester para el rango de un producto de dos matrices cuadradas A y B de orden n: $r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant \text{mín}(r_A, r_B)$ (véase el problema 931).

1493. Demostrar que:

a) el rango $(\varphi + \psi) \leqslant$ rango $\varphi +$ rango ψ;

b) def. $(\varphi\psi) \leqslant$ def. $\varphi +$ def. ψ para cualesquiera transformaciones lineales φ y ψ del espacio R_n.

1494. Hallar los valores propios y los vectores propios de la

transformación lineal φ dada en la base a_1, a_2, a_3, a_4 por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que el subespacio tendido sobre los vectores $a_1 + 2a_2$ y $a_2 + a_3 + 2a_4$ es invariante con respecto a φ.

1495*. Demostrar que la cantidad de vectores propios, linealmente independientes, de la transformación φ, pertenecientes a un valor propio de λ_0 no supera a la multiplicidad de λ_0 como raíz del polinomio característico de la transformación φ.

1496. Demostrar que un subespacio lineal tendido sobre cualquier sistema de vectores propios de la transformación φ, es invariante con relación a φ.

1497. Demostrar que el conjunto de todos los vectores propios de una transformación lineal φ, pertenecientes a un mismo valor propio de λ_0 (junto con el vector nulo), es un subespacio lineal, invariante con respecto a φ.

1498. Demostrar que todos los vectores de un espacio distintos de cero, son vectores propios de la transformación lineal φ cuando, y sólo cuando, φ es la transformación de semejanza, es decir, $\varphi x = \alpha x$, siendo α el mismo para cualquier vector x.

1499. Demostrar que cualquier subespacio L, invariante con respecto a una transformación lineal regular φ, será también invariante con relación a la transformación inversa φ^{-1}.

1500. Demostrar que: a) la imagen φL y b) la preimagen completa $\varphi^{-1}L$ del subespacio lineal L, invariante con respecto a una transformación lineal φ, serán ellas mismas invariantes con relación a φ.

1501. Hallar todos los subespacios lineales del espacio de los polinomios con respecto a una indeterminada de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales, subespacios invariantes con respecto a la transformación φ que convierte cualquier polinomio en su derivada.

1502. Demostrar que la matriz de una transformación lineal φ de un espacio n-dimensional en la base $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una matriz celular semidescompuesta tipo:

a) $\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, donde A_1 es una matriz cuadrada de orden $k < n$, cuando, y sólo cuando, el subespacio lineal tendido sobre los primeros k vectores de la base $a_1, \ldots, a_k$, es invariante con respecto a φ;

b) $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$, donde A_1 es una matriz cuadrada de orden $k < n$, cuando, y sólo cuando, el subespacio lineal, tendido sobre los últimos $n - k$ vectores de la base $a_{k+1}, \ldots, a_n$, es invariante con respecto a φ;

c) la matriz será descompuesta celular tipo $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, donde A_1 es una matriz cuadrada de orden k, cuando, y sólo cuando, tanto el subespacio, tendido sobre los vectores $a_1, \ldots, a_k$, como también el subespacio, tendido sobre los vectores $a_{k+1}, \ldots, a_n$, es invariante con respecto a φ.

1503*. Supongamos que la transformación lineal φ de un espacio n-dimensional R_n en la base $a_1, \ldots, a_n$, tiene una matriz diagonal con diferentes elementos en la diagonal. Hallar todos los subespacios lineales, invariantes con respecto a φ, y determinar su cantidad.

1504. Hallar todos los subespacios de un espacio tridimensional, invariantes con respecto a la transformación lineal, prefijada mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1505. Hallar todos los subespacios de un espacio tridimensional, invariantes simultáneamente con respecto a dos transformaciones lineales, prefijadas mediante las matrices:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1506. Demostrar que cualesquiera dos transformaciones lineales conmutativas de un espacio complejo tienen un vector propio común.

1507. Demostrar que para cualquier conjunto (aunque sea infinito) de transformaciones lineales conmutativas de dos en dos de un espacio complejo R_n existe un vector, propio para todas las transformaciones de dicho conjunto.

1508. Demostrar que los vectores radicales pertenecientes a distintos valores propios, son linealmente independientes.

Hallar los valores propios y los subespacios radicales de las transformaciones lineales, prefijadas en cierta base mediante las siguientes matrices:

1509. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

1510. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

1511. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

1512. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1513. Demostrar que la transformación lineal de un espacio complejo tiene una matriz diagonal en cierta base cuando, y sólo cuando, todos sus vectores radicales son vectores propios.

1514. Demostrar que un espacio complejo consta sólo de vectores radicales de la transformación lineal φ cuando, y sólo cuando, todos los valores propios de dicha transformación son iguales entre sí.

1515. Sean R un espacio de dimensión infinita de todas las funciones reales $f(x)$, definidas y con derivadas de cualquier orden en toda la recta numérica, para las corrientes operaciones de la suma de funciones y multiplicación de la función por un número, y φ una transformación que convierte cualquier función en su derivada.

Hallar: a) todos los valores propios y los vectores propios, b) todos los subespacios radicales de la transformación φ.

1516. El espacio R_n se denomina *cíclico* con respecto a la transformación lineal φ, si R_n posee cierta base cíclica, o sea, la base $a_1, a_2, \ldots, a_n$, para la cual

$$\varphi a_k = a_{k+1}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Demostrar que si R_n es un espacio cíclico con respecto a φ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una base cíclica, entonces:

a) el polinomio mínimo $g(\lambda)$ de la transformación φ tiene el grado n;

b) el polinomio mínimo de todo el espacio coincide con el polinomio mínimo del vector a_1;

c) si $\varphi a_n = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n$, el polinomio mínimo de la transformación φ se determina mediante la igualdad

$$g(\lambda) = \lambda^n - c_n\lambda^{n-1} - c_{n-1}\lambda^{n-2} - \ldots - c_1.$$

1517. Demostrar que si el grado del polinomio mínimo $g(\lambda)$ de la transformación lineal φ del espacio R_n es igual a n y $g(\lambda)$ es el grado del polinomio irreducible sobre el campo, sobre el cual se examina el espacio R_n, o sea, en caso de un espacio complejo $g(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$, entonces:

a) R_n no se descompone en una suma directa de dos subespacios, invariantes con respecto a φ;

b) R_n es cíclico con respecto a φ.

¿Qué forma tiene la matriz de la transformación φ en la base cíclica?

1518. Supongamos que el polinomio mínimo de la transformación lineal φ del espacio R_n tiene el aspecto $(\lambda - \alpha)^n$. Demostrar que existe un vector a, tal que los vectores $(\varphi - \alpha\varepsilon)^{n-1} a$, $(\varphi - \alpha\varepsilon)^{n-2} a, \ldots, (\varphi - \alpha\varepsilon) a$, a, donde ε es una transformación idéntica, forman una base del espacio. ¿Qué forma tendrá la matriz de la transformación φ en esta base?

1519. Demostrar que cualquier subespacio L del espacio complejo R_n, invariante a la transformación lineal φ, contiene una recta, invariante con relación a φ.

1520. Demostrar que cualquier subespacio L de un espacio real R_n, invariante con respecto a la transformación lineal φ y con dimensión impar, contiene una recta, invariante a φ. Mostrar en

ejemplos que para un subespacio de dimensión par la afirmación es incorrecta. ¿En qué condiciones L contiene una recta, todos los puntos de la cual permanecen inmóviles para la transformación φ?

1521. Demostrar que el espacio complejo que contiene sólo una recta, invariante con respecto a la transformación lineal φ, es indescomponible en la suma directa de dos subespacios no nulos, invariantes a φ.

1522. Demostrar que el espacio complejo R_n con respecto a la transformación lineal φ dada se descompone en la suma directa de subespacios (uno o varios) lineales invariantes, cada uno de los cuales contiene sólo una recta invariante y, por lo tanto (conforme al problema anterior), en lo sucesivo es indescomponible.

1523*. Sean φ una transformación lineal del espacio R_n y $g(\lambda)$ un polinomio mínimo de φ. Demostrar que:

a) si $g(\lambda) = h(\lambda)\,k(\lambda)$ y los polinomios $h(\lambda)$ y $k(\lambda)$ son primos entre sí, el espacio R_n es la suma directa de los subespacios L_1 que consta de todos los vectores x, tales que $h(\lambda)\,x = 0$, y L_2 que consta de todos los vectores x, tales que $k(\lambda)\,x = 0$;

b) si $g(\lambda) = h_1(\lambda)\,h_2(\lambda)\,\ldots\,h_s(\lambda)$ y los polinomios $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda), \ldots, h_s(\lambda)$ son primos entre sí de dos en dos, el espacio R_n es una suma directa de los subespacios L_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, donde L_i consta de todos los vectores x, tales que $h_i(\lambda)\,x = 0$.

1524*. La transformación lineal φ en la base e_1, e_2, e_3 se prefija mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar el polinomio mínimo $g(\lambda)$ de esta transformación y la descomposición del espacio en una suma directa de los subespacios, correspondiente a la descomposición de $g(\lambda)$ en factores primos entre sí tipo $(\lambda - \alpha)^k$.

1525. Resolver un problema semejante al anterior, si la transformación lineal φ en la base e_1, e_2, e_3 se prefija mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

1526. La transformación lineal φ de un espacio euclídeo (o unitario) R_n se prefija mediante la igualdad $\varphi x = (x, a)\,a$ para cualquier x perteneciente a R_n con la particularidad de que a es el vector no nulo dado. Hallar el polinomio mínimo $g(\lambda)$ de esa transformación y la descomposición del espacio en una suma directa, correspondiente a la descomposición de $g(\lambda)$ en potencias primas entre sí de polinomios irreducibles con coeficientes reales (o polinomios tipo $\lambda - \alpha$ en caso de un espacio unitario).

1527. Hallar la forma de Jordan de la matriz de una transforma-

ción lineal φ del espacio complejo R_n si φ posee sólo un vector propio, con la exactitud de hasta un factor numérico.

1528. Demostrar que la cantidad de vectores propios linealmente independientes de la transformación lineal φ, pertenecientes a un mismo valor propio de λ_0, es igual a la cantidad de células con elementos diagonales λ_0 en la forma de Jordan de la matriz φ.

1529*. Demostrar que la base, en la cual la matriz de la transformación lineal φ de un espacio vectorial complejo R_n tiene una forma de Jordan, puede construirse de la siguiente manera:

A) Si no todos los valores propios de φ son iguales entre sí y el polinomio característico tiene el aspecto

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{para} \quad i \neq j),$$

construimos la base del subespacio P_i de todos los vectores x, tales que $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} x = 0$ (ε es una transformación idéntica, $i = 1, 2, \ldots, s$).

El espacio R_n será una suma directa de los subespacios P_i. Éstos son invariantes con respecto a φ; φ en P_i tiene un valor propio de λ_i con la particularidad de que $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} x = 0$ para cualquier vector x de P_i. En esta construcción puede tomarse en vez del polinomio característico $f(\lambda)$, el polinomio mínimo $g(\lambda)$, lo que puede reducir los exponentes de la potencia k_i.

B) Supongamos que φ en R_n tiene el único valor propio de λ_0 y k es el mínimo número positivo entero, tal que $(\varphi - \lambda_0 \varepsilon)^k = 0$. Pongamos $\psi = \varphi - \lambda_0 \varepsilon$. Se denomina *altura* de un vector x el mínimo h, tal que $\psi^h x = 0$. Designemos el subespacio de todos los vectores de altura $\leqslant h$ $(0 \leqslant h \leqslant k)$ por R_h. R_0 contiene sólo el vector nulo; R_k coincide con todo el espacio.

Construimos la base de R_1, la completamos hasta la base de R_2, la base obtenida la completamos hasta la base de R_3, etc., hasta que obtengamos la base de R_k (con fin de abreviar, denominaremos estas bases iniciales). Para cada vector f de altura k de una base inicial de R_k construimos una *serie* de vectores $f, \psi f, \psi^2 f, \ldots, \psi^{k-1} f$ con el vector inicial f. Tomamos cualquier base (por ejemplo, la inicial) de R_{k-2} y los vectores de altura $k - 1$ de todas las series construidas. Juntos estos vectores serán linealmente independientes. Los completamos hasta la base de R_{k-1} mediante cualesquiera vectores (por ejemplo, de la base inicial de R_{k-1}). Para cada uno de los vectores f, tomados complementariamente (si éstos existen en general), construimos una serie nueva: $f, \psi f, \psi^2 f, \ldots, \psi^{k-2} f$, etc.

Supongamos que en un cierto paso ya se han construido las series, en las cuales los vectores de altura $h + 1$ junto con cualquier base de R_h (por ejemplo, la inicial), forman la base de R_{h+1}. Los vectores de cualquier base de R_{h-1} (por ejemplo, con la inicial) junto con los vectores de altura h de las series construidas serán linealmente independientes. Las completamos hasta la base de R_h mediante cualesquiera vectores (por ejemplo, pertenecientes a la base inicial de R_h). Para cada uno de los vectores f tomados complementariamente

(si existen en realidad) construimos una serie nueva: $f, \psi f, \psi^2 f, \ldots, \psi^{h-1}f$. Continuamos hasta que los vectores de todas las series construidas formen en total una base de todo el espacio. Después de escribir los vectores serie tras serie, de modo que en cada serie los vectores se toman en orden inverso (el vector inicial de la serie se toma como último en la serie dada), obtenemos la base buscada, en la cual la matriz de la transformación φ tiene la forma de Jordan.

C) La base, cuya construcción se da en los puntos A) y B), no está determinada unívocamente. Demostrar la unicidad (con la exactitud de hasta el orden de la disposición de las células de Jordan) de la matriz de Jordan A_J, semejante a la matriz cuadrada A dada (y por consiguiente, la unicidad de la forma de Jordan de la matriz de dicha transformación lineal φ). A saber: demostrar que la forma de Jordan A_J de la matriz A de orden n se determina de la siguiente manera. Sean k el orden máximo de las células de Jordan de la matriz A_J que tiene el número λ_0 en la diagonal, x_h el número de semejantes células de orden h ($h = 1, 2, \ldots, k$), $B = A - \lambda_0 E$, r_h el rango de la matriz B^h ($h = 0, 1, 2, \ldots, k, k+1$). Entonces los números x_h se determinan mediante las fórmulas

$$x_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1} \quad (h = 1, 2, \ldots, k) \qquad (\alpha)$$

Observación. Las fórmulas (α) nos dan el procedimiento para buscar la forma de Jordan A_J sin aplicar la teoría de divisores elementales de las λ-matrices.

La transformación lineal φ del espacio R_n en la base $e_1, \ldots, e_n$ está dado mediante la matriz A. Hallar la base $f_1, \ldots, f_n$, en la que la matriz de dicha transformación tiene la forma de Jordan A_J, y hallar esa forma de Jordan (la base buscada no está determinado unívocamente).

1530. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. **1531.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1532. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 5 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$. **1533.** $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1534. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1535.** $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1536. $A = B^2$, donde $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ es la célula de Jordan de orden n.

1537*. La transformación lineal φ del espacio R_n se denomina *involutiva* si $\varphi^2 = \varepsilon$, donde ε es una transformación idéntica. Aclarar el sentido geométrico de la transformación involutiva.

1538*. La transformación lineal φ del espacio R_n se denomina *idempotente* si $\varphi^2 = \varphi$. Aclarar el sentido geométrico de la transformación idempotente.

1539. Citar unos ejemplos de la transformación lineal φ de un espacio tridimensional, para la cual:

a) el espacio no es la suma directa del campo de valores de L_1 y del núcleo L_2 de la transformación φ (la definición se ofrece en el problema 1488);

b) el espacio es la suma directa del campo de valores de L_1 y del núcleo L_2 para φ, pero φ no es la proyección sobre L_1 paralelamente a L_2.

§ 19. Transformaciones lineales de los espacios vectoriales unitarios y euclídeos

1540. Demostrar que la operación del paso de una transformación lineal φ del espacio unitario (o euclídeo) a la transformación conjugada φ^* posee las siguientes propiedades:

a) $(\varphi^*)^* = \varphi$; b) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

c) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$; d) $(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*$;

e) si φ es regular, $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

1541. Supongamos que e_1, e_2 es una base ortonormal de un plano y la transformación lineal φ en la base $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de la transformación conjugada φ^* en la misma base f_1, f_2.

1542. La transformación lineal φ de un espacio euclídeo en la base de vectores $f_1 = (1, 2, 1)$, $f_2 = (1, 1, 2)$, $f_3 = (1, 1, 0)$ se prefija mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz de la transformación conjugada φ^* en la misma base, considerando que las coordenadas de los vectores de la base se dan en cierta base ortonormal.

1543. Hallar la matriz de la transformación lineal φ^* conjugada de la transformación φ en una base ortonormal e_1, e_2, e_3 si φ pasa los vectores $a_1 = (0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ a los vectores $b_1 = (1, 2, 1)$, $b_2 = (3, 1, 2)$ y $b_3 = (7, -1, 4)$, respectivamente, donde las coordenadas de todos los vectores se dan en la base e_1, e_2, e_3.

1544. Sean xOy un sistema rectangular de coordenadas en el plano y φ la proyección del plano sobre el eje Ox paralelamente a la bisectriz del primero y tercer cuadrante. Hallar la transformación conjugada φ^*.

1545*. Sean $R_n = L_1 + L_2$ una descomposición del espacio euclídeo (o unitario) en una suma directa de dos subespacios; φ la proyección de R_n sobre L_1 paralelamente a L_2; L_1^* y L_2^* los complementos ortogonales para L_1 y L_2, respectivamente; φ^* la transformación conjugada de φ. Demostrar que $R_n = L_1^* + L_2^*$ y que φ es la proyección de R_n sobre L_2^* paralelamente a L_1^*.

1546. Demostrar que si el subespacio L de un espacio unitario (o euclídeo) es invariante con respecto a la transformación lineal φ, el complemento ortogonal L^* es invariante a la transformación conjugada φ^*.

1547*. Demostrar que la transformación lineal φ del espacio unitario R_n tiene un subespacio invariante de cualquier número de dimensiones desde cero hasta n.

1548*. Demostrar que para cualquier transformación lineal φ del espacio unitario existe una base ortonormal, en la cual la matriz de esa transformación tiene una forma triangular (teorema de Schur).

1549. Escribir la ecuación de un plano, invariante a una transformación lineal φ, prefijada en cierta base ortonormal mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -23 & 17 \\ 11 & -43 & 30 \\ 15 & -54 & 37 \end{pmatrix}.$$

1550. Demostrar que si un mismo vector x es propio para la transformación lineal φ con el valor λ_1 y para la transformación conjugada φ^* con el valor λ_2, entonces $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$.

1551. Demostrar que si la transformación lineal φ de un espacio unitario R_n tiene los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, los números conjugados $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_n$ serán los valores propios de la transformación conjugada φ^*.

1552. Demostrar que los coeficientes correspondientes unos a otros de los polinomios mínimos de las transformaciones lineales conjugadas entre sí son mutuamente conjugados.

1553*. Supongamos que la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) en la base $e_1, \ldots, e_n$ posee una matriz A, y la transformación conjugada φ^* en la base recíproca (véase el problema 1417) $f_1, \ldots, f_n$, la matriz B. Demostrar que $B = \overline{A}'$ en el espacio unitario y $B = A'$ en el espacio euclídeo.

1554*. Supongamos que el producto escalar (x, y) en cierta base se prefija mediante una forma bilineal f con la matriz U (en otras palabras, U es la matriz de Gram de los vectores de la base). Mostrar que la matriz A de una transformación lineal φ y la matriz A_1 de la transformación conjugada φ^* en dicha base se relacionan de la si-

guiente manera:

a) $A_1 = U^{-1}A'U$ para el espacio euclídeo;

b) $\bar{A}_1 = U^{-1}A'U$ para el espacio unitario.

Supongamos que en cierta base el producto escalar se prefija mediante la forma bilineal f y la transformación lineal φ mediante la matriz A. Hallar la matriz A_1 de la transformación conjugada φ^* en la misma base:

1555. $f = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1556. $f = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sean U la matriz de Gram de cierta base y A una matriz de la transformación φ. Hallar la matriz A_1 de la transformación conjugada φ^* en la misma base:

1557. $U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1558. $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1559. Sea φ una transformación lineal del espacio euclídeo o unitario. Demostrar que $(e^{\varphi})^* = e^{\varphi^*}$. (La definición de la función con respecto a la transformación lineal se da en el problema 1464.)

1560. Demostrar que el producto de dos transformaciones ortogonales (unitarias, respectivamente) es ortogonal (unitario).

1561. Demostrar que si la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) conserva las longitudes de todos los vectores, ella es unitaria (ortogonal, respectivamente).

1562*. Supongamos que en un espacio unitario (o euclídeo) se prefija cierta transformación φ, en virtud de la cual a cada vector x le corresponde el único vector φx. Demostrar que si la transformación φ conserva el producto escalar, o sea, $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$ para cualesquiera vectores x, y del espacio, φ será una transformación lineal y, por lo tanto, unitaria (ortogonal, respectivamente). Mostrar en ejemplos que la conservación de los cuadrados escalares de todos los vectores es insuficiente para que φ sea lineal.

1563. Supongamos que la multiplicación escalar de los vectores del espacio R_n se prefija mediante la matriz de Gram U de vectores de cierta base. Hallar la condición, necesaria y suficiente, para que

la transformación lineal φ, prefijada en la misma base mediante la matriz A, sea:

a) ortogonal de un espacio euclídeo;

b) unitaria para un espacio unitario.

1564. Demostrar que si dos vectores x, y de un espacio euclídeo (o unitario) tienen la misma longitud, existe una transformación ortogonal (unitaria, respectivamente) que hace pasar x a y.

1565. Demostrar que si dos pares de vectores x_1, x_2 e y_1, y_2 de un espacio euclídeo (o unitario) poseen las propiedades $|x_1| = |y_1|$, $|x_2| = |y_2|$ y el ángulo entre x_1 y x_2 es igual al ángulo entre y_1 e y_2, existe una transformación ortogonal (unitaria, respectivamente) φ, tal que $\varphi x_1 = y_1$, $\varphi x_2 = y_2$.

1566*. Supongamos que se dan dos sistemas de vectores $x_1, \ldots, x_k$ e $y_1, \ldots, y_k$ de un espacio euclídeo (o unitario). Demostrar la afirmación: para que exista una transformación ortogonal (unitaria, respectivamente) φ, tal que $\varphi x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, es necesario y suficiente que la matrices de Gram de ambos sistemas de vectores coincidan: $((x_i, x_j))_1^k = ((y_i, y_j))_1^k$.

1567*. Sea φ una transformación unitaria (u ortogonal) de un espacio unitario (euclídeo, respectivamente) R_n. Demostrar que el complemento ortogonal L^* al subespacio lineal L, invariante con respecto a φ, también es invariante a φ.

1568. Demostrar que dos transformaciones unitarias conmutativas de un espacio unitario poseen una base ortonormal común de vectores propios.

1569*. Demostrar que para la transformación unitaria φ de un espacio unitario:

a) los valores propios, según el módulo, son iguales a la unidad (y, por lo tanto, los números característicos de una matriz unitaria, en particular, ortogonal real, según el módulo, son iguales a la unidad);

b) los vectores propios, pertenecientes a dos distintos valores propios, son ortogonales;

c) si en cierta base la matriz A de la transformación φ es real y el vector propio, perteneciente al valor propio complejo $\alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, se representa en forma de $x + yi$, donde los vectores x e y tienen coordenadas reales, x e y son ortogonales y tienen una misma longitud con la particularidad de que

$$\varphi x = \alpha x - \beta y; \quad \varphi y = \beta x + \alpha y; \tag{1}$$

d) la transformación ortogonal de un espacio euclídeo siempre posee un subespacio invariante unidimensional o bidimensional.

1570*. Demostrar que:

a) para cualquier transformación unitaria φ de un espacio unitario R_n existe una base ortonormal que consta de vectores propios de la transformación φ. En esta base la matriz de φ es diagonal con elementos diagonales, iguales a la unidad, según el módulo.

¿Qué propiedad de las matrices unitarias se desprende de aquí?

b) para cualquier transformación ortogonal φ de un espacio euclídeo R_n existe una base ortonormal, en la cual la matriz de φ tiene una forma canónica, donde en la diagonal principal se encuentran las células de segundo orden tipo

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \ (\gamma \neq k\pi)$$

y las células de primer orden tipo (± 1).

Las células de alguno de esos tipos pueden estar ausentes. Todos los demás elementos son nulos. ¿Cuál es el sentido geométrico de la transformación? ¿Qué propiedad de las matrices ortogonales reales se desprende de aquí?

Para la transformación ortogonal φ, prefijada en una base ortonormal mediante la matriz A, hallar una base ortonormal, en la que la matriz B de esa transformación tiene la forma canónica, indicada en el problema 1570. Hallar la forma canónica. (La base buscada no está determinada unívocamente.)

1571.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1572.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1573.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} & \frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Hallar la forma canónica B de una matriz ortogonal A y la matriz ortogonal Q, tal que $B = Q^{-1}AQ$:

1574.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1575.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1576.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1577.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1578. Para la matriz unitaria dada

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$

hallar la matriz diagonal B y la matriz unitaria Q, tales que

$$B=Q^{-1}AQ.$$

1579. Demostrar que la combinación lineal de las transformaciones autoconjugadas con coeficientes reales (por ejemplo, la suma de dos transformaciones autoconjugadas) es una transformación autoconjugada.

1580. Demostrar que el producto $\varphi\psi$ de dos transformaciones autoconjugadas φ y ψ será autoconjugado cuando, y sólo cuando, φ y ψ son conmutativas.

1581. Demostrar que si φ y ψ son transformaciones conjugadas, las transformaciones

$$\varphi\psi+\psi\varphi \quad \text{e} \quad i\,(\varphi\psi-\psi\varphi)$$

también serán autoconjugadas.

1582. Demostrar que la reflexión φ de un espacio euclídeo (o unitario) R_n en el subespacio L_1 paralelamente a L_2 será una transformación lineal autoconjugada cuando, y sólo cuando, L_1 y L_2 son ortogonales.

1583. Demostrar que la proyección φ de un espacio euclídeo (o unitario) R_n sobre el subespacio L_1 paralelamente al subespacio L_2 será una transformación lineal autoconjugada, cuando, y sólo cuando, L_1 y L_2 son ortogonales.

1584. Demostrar que si la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) R_n posee cualesquiera dos de las siguientes tres propiedades:

1) φ es una transformación autoconjugada;

2) φ es una transformación unitaria (ortogonal, respectivamente);

3) φ es una transformación involutiva, o sea, $\varphi^2 = \varepsilon$ es una transformación idéntica, ella posee también la tercera propiedad. Hallar todos los tipos de transformaciones que poseen todas esas propiedades.

Hallar la base ortonormal de vectores propios y la matriz B en esa base para una transformación lineal, prefijada en cierta base ortonormal mediante la matriz A (la base buscada no se determina unívocamente):

1585. $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

1586. $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$. 1587. $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Para la matriz A dada hallar una matriz diagonal B y unitaria C, tales que $B = C^{-1}AC$.

1588. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$. 1589. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$

1590*. Examinemos un espacio n^2-dimensional de todas las matrices cuadradas complejas de orden n que poseen las corrientes operaciones de adición de las matrices y la multiplicación de la matriz por un número. Transformemos este espacio en unitario, considerando que el producto escalar de dos matrices $A = (a_{ij})_1^n$ y $B = (b_{ij})_1^n$ se prefija mediante la igualdad $(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ij}$.

Demostrar que:

a) la multiplicación de todas las matrices a la izquierda por una misma matriz C es una transformación lineal;

b) las matrices unitarias como vectores del espacio señalado, tienen una longitud de $\sqrt{n}$;

c) la multiplicación de todas las matrices a la izquierda por las matrices traspuestas-conjugadas C y $\bar{C}'$ originan transformaciones conjugadas;

d) la multiplicación a la izquierda por una matriz unitaria C origina una transformación unitaria;

e) la multiplicación por una matriz hermitiana origina una transformación autoconjugada;

f) la multiplicación por una matriz antihermitiana origina una transformación antisimétrica.

1591. Supongamos que la multiplicación escalar de los vectores en un espacio R_n se prefija mediante la matriz de Gram U en cierta base. Hallar la condición, necesaria y suficiente, para que la transformación lineal φ, prefijada en la misma base mediante la matriz A, sea autoconjugada en el caso: a) de un espacio euclídeo, b) unitario.

1592*. Demostrar que dos transformaciones autoconjugadas φ y ψ de un espacio unitario (o euclídeo) R_n tienen una base ortonormal común de vectores propios de ambas transformaciones cuando, y sólo cuando, éstas son conmutativas. ¿Qué propiedad de las formas cuadráticas y de las superficies de segundo grado se deduce de aquí?

1593. Sea R un espacio euclídeo de dimensión n^2, cuyos vectores son todas las matrices reales de orden n con operaciones corrientes de la adición de matrices y la multiplicación de la matriz por un número, y el producto escalar de las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se determina mediante la igualdad $(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$. Prosiguiendo, supongamos que P y Q son matrices simétricas reales de orden n.

Demostrar que las transformaciones lineales $\varphi X = PX$ y $\psi X = XQ$ (X es cualquier matriz del espacio R) son transformaciones autoconjugadas conmutativas del espacio R y hallar el enlace entre la base ortonormal común de vectores propios de las transformaciones φ y ψ y las bases ortonormales de vectores propios de las matrices P y Q.

1594. La transformación lineal autoconjugada φ de un espacio unitario (o euclídeo) R_n se denomina determinada positiva si $(\varphi x, x) > 0$, y se llama no negativa si $(\varphi x, x) \geqslant 0$ para cualquier vector $x \neq 0$ perteneciente a R_n. Demostrar que la transformación autoconjugada φ es determinada positiva (o no negativa) cuando, y sólo cuando, todos sus valores propios son positivos (no negativos, respectivamente). Mostrar que para cualquier transformación lineal (y no sólo para la autoconjugada) φ de $(\varphi x, x) > 0$ (ó $\geqslant 0$) se desprende que todos los valores propios de φ son positivos (no negativos, respectivamente). Dar un ejemplo que muestre que la afirmación contraria para la transformación lineal autoconjugada puede ser incorrecta.

1595*. Demostrar que si $\varphi = \psi\chi$ ó $\varphi = \chi\psi$, donde φ y ψ son transformaciones lineales autoconjugadas con valores propios positivos y χ una transformación unitaria, $\varphi = \psi$ y χ es una transformación idéntica (véase el problema 1276, c).

1596*. Demostrar que cualquier transformación lineal regular φ de un espacio unitario (o euclídeo) se representa tanto en forma de

$\varphi = \psi_1\chi_1$, como también en forma de $\varphi = \psi_2\chi_2$, donde ψ_1, ψ_2 son transformaciones autoconjugadas con valores propios positivos y χ_1, χ_2 son transformaciones unitarias (ortogonales, respectivamente) con la particularidad de que ambas representaciones indicadas son únicas.

1597. ¿Por qué las igualdades

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no contradicen a la unicidad de la representación, indicada en el problema anterior?

Representar las siguientes matrices en forma de un producto de una matriz simétrica con números característicos positivos por una matriz ortogonal:

1598. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **1599.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. **1600.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1601. Demostrar que la transformación lineal autoconjugada φ es determinada positiva cuando, y sólo cuando, los coeficientes de su polinomio característico $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$ son todos distintos de cero y tienen signos alternativos, y es no negativa (es decir, con los valores propios no negativos) cuando, y sólo cuando, los coeficientes $c_0 = 1, c_1, c_2, \ldots, c_k$ son distintos de cero y tienen signos alternativos, mientras que $c_{k+1}, \ldots, c_n$ son nulos. Aquí k es cualquier número desde 0 hasta n.

1602*. Demostrar que si φ y ψ son transformaciones autoconjugadas y φ es determinada positiva, los valores propios de la transformación $\varphi\psi$ son reales.

1603*. Demostrar que si φ y ψ son transformaciones autoconjugadas con valores propios no negativos, con la particularidad de que una de ellas es regular, los valores propios de la transformación $\varphi\psi$ son reales y no negativos.

1604. Demostrar que la suma de dos o varias transformaciones autoconjugadas no negativas (véase el problema 1594) es de nuevo una transformación autoconjugada no negativa.

1605*. Demostrar que una transformación autoconjugada no negativa de rango r es la suma de r transformaciones autoconjugadas no negativas de rango 1.

1606*. Demostrar que la transformación lineal φ de un espacio unitario R_n que posee el rango igual a la unidad, será autoconjugada no negativa cuando, y sólo cuando, en cualquier base ortonormal su matriz se representa en forma de $\overline{X}'X$, donde X es una fila de n números.

1607*. Demostrar que si las matrices $A = (a_{ij})_1^n$ y $B = (b_{ij})_1^n$ son hermitianas y no negativas (es decir, tienen valores propios no negativos), también la matriz $C = (c_{ij})_1^n$, donde $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ $(i, j =$

$= 1, 2, \ldots, n$), es hermitiana y no negativa (compárese con el problema 1220).

1608. La transformación lineal φ de un espacio euclídeo (o unitario) R_n se denomina antisimétrica si $\varphi^* = -\varphi$, donde φ^* es una transformación conjugada con φ. Demostrar que:

a) para que la transformación lineal φ del espacio euclídeo sea antisimétrica es necesario y suficiente que su matriz A sea antisimétrica en cualquier base ortonormal, o sea, $A' = -A$;

b) para que la transformación lineal φ del espacio unitario sea antisimétrica es necesario y suficiente que su matriz A sea antihermitiana en cualquier base ortonormal, o sea, $\bar{A}' = -A$.

1609*. Demostrar que el complemento ortogonal L^* al subespacio L del espacio euclídeo (o unitario) invariante con relación a la transformación antisimétrica φ, es también invariante con respecto a φ.

1610*. Demostrar que para la transformación antisimétrica φ de un espacio unitario:

a) los valores propios son imaginarios puros (y, por lo tanto, los números característicos de una matriz antihermitiana, por ejemplo, antisimétrica real, son imaginarios puros);

b) los vectores propios, pertenecientes a dos distintos valores propios, son ortogonales;

c) si en una base ortonormal la matriz A de la transformación φ es real y el vector propio, perteneciente al valor $\beta i \neq 0$, se representa en forma de $x + yi$, donde los vectores x e y tienen coordenadas reales, x e y son ortogonales y son de la misma longitud, con la particularidad de que

$$\varphi x = -\beta y, \quad \varphi y = \beta x; \tag{1}$$

d) la transformación antisimétrica de un espacio euclídeo posee siempre un subespacio invariante uni- o bidimensional.

1611*. Demostrar que:

a) para cualquier transformación antisimétrica φ de un espacio unitario R_n existe una base ortonormal que consta de vectores propios de la transformación φ. En esta base la matriz φ es diagonal con elementos imaginarios puros en la diagonal (con la particularidad de que algunos de estos elementos pueden ser nulos). ¿Qué propiedad de las matrices antihermitianas complejas se desprende de aquí?

b) para cualquier transformación antisimétrica φ de un espacio euclídeo R_n existe una base ortonormal, en la cual la matriz tiene la siguiente forma canónica: en la diagonal principal se encuentran las células de segundo orden tipo $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, donde $\beta \neq 0$, y las células nulas de primer orden (las células de uno de estos tipos pueden estar ausentes). ¿Cuál es el sentido geométrico de la transformación y qué propiedad de las matrices antisimétricas reales se desprende de aquí?

1612. Demostrar que si φ es una transformación autoconjugada

del espacio unitario, la transformación $\psi = i\varphi$ es antisimétrica, viceversa, si φ es una transformación antisimétrica, $\psi = i\varphi$ es una transformación autoconjugada.

1613. Demostrar que si φ es una transformación autoconjugada del espacio unitario, la transformación $\psi = (\varphi - i\varepsilon)^{-1} (\varphi + i\varepsilon)$, donde ε es una transformación idéntica, la cual existe y es unitaria.

1614*. Demostrar que las transformaciones unitarias y antisimétricas de un espacio unitario (y, correspondientemente, las transformaciones ortogonales y antisimétricas de un espacio euclídeo) están relacionadas de la siguiente manera: si en la igualdad

$$\psi = (\varepsilon - \varphi) (\varepsilon + \varphi)^{-1} \tag{1}$$

(donde ε es una transformación idéntica) φ es una transformación antisimétrica, ψ será una transformación unitaria que no tiene el número -1 como valor propio, viceversa, si en la misma igualdad (1) φ es una transformación unitaria que no tiene el número -1 como valor propio, ψ será una transformación antisimétrica. La igualdad (1) determina una aplicación biunívoca de todas las transformaciones antisimétricas sobre todas las transformaciones unitarias que no tienen el número -1 como valor propio. Entre las transformaciones ortogonales y antisimétricas de un espacio euclídeo también existe semejante relación. ¿Qué propiedades de las matrices se desprenden de aquí?

1615. Mostrar que la igualdad (1) del problema anterior define la correspondencia biunívoca, primero, entre todas las transformaciones antisimétricas regulares y todas las unitarias (ortogonales, respectivamente) sin valores propios de ± 1, y, segundo, entre todas las transformaciones antisimétricas degeneradas y todas las unitarias (ortogonales) con valores propios de $+1$, pero sin el valor propio de -1.

1616. Demostrar que si φ es una transformación antisimétrica de un espacio unitario (o euclídeo), la transformación e^{φ} es unitaria (ortogonal, respectivamente). ¿Qué propiedad de las matrices se deduce de aquí?

1617*. Demostrar que la función e^{φ} origina una aplicación biunívoca de todas las transformaciones autoconjugadas de un espacio unitario (o euclídeo) sobre todas las transformaciones determinadas positivamente (o sea, autoconjugadas con valores propios positivos).

1618. La transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) se denomina normal si es conmutativo con la transformación φ^* conjugada con la primera. Comprobar si las transformaciones unitarias (u ortogonales), antisimétricas y autoconjugadas son normales.

1619. Demostrar que la transformación normal de un espacio unitario (o euclídeo) es autoconjugada cuando, y sólo cuando, todos sus valores propios (correspondientemente, todas las raíces de su ecuación característica) son reales.

1620. Demostrar que la transformación normal de un espacio unitario (o euclídeo) es unitaria (ortogonal, respectivamente) si,

y sólo si, todos sus valores propios (correspondientemente, todas las raíces de su ecuación característica) son iguales a la unidad, según el módulo.

1621. Demostrar que la transformación normal de un espacio unitario (o euclídeo) es antisimétrico, cuando, y sólo cuando, todos sus valores propios (correspondientemente, todas las raíces de su ecuación característica) son imaginarios puros.

1622. Demostrar que la transformación lineal φ de un espacio unitario es normal cuando, y sólo cuando, $\varphi = \psi\chi$, donde ψ es una transformación autoconjugada y χ, unitaria, ambas conmutativas entre sí.

1623. Demostrar que:

a) cada transformación lineal φ se representa unívocamente en la forma $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, donde φ_1 es una transformación autoconjugada y φ_2, antisimétrica;

b) para que la transformación φ sea normal es necesario y suficiente que las transformaciones φ_1 y φ_2 sean conmutativas en la representación señalada antes.

1624. Demostrar que:

a) cada transformación lineal φ de un espacio unitario se representa unívocamente en la forma $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, donde φ_1 y φ_2 son transformaciones autoconjugadas;

b) para que la transformación φ sea normal es necesario y suficiente que las transformaciones φ_1 y φ_2 sean conmutativas en la representación señalada antes.

1625*. Demostrar que para cualquier conjunto (finito o infinito) de transformaciones normales conmutativas de dos en dos de un espacio unitario R_n existe una base ortonormal, cuyos vectores son propios para todas las transformaciones de dicho conjunto.

1626. Demostrar que en el dominio de transformaciones normales de cualquier transformación normal φ de un espacio unitario R_n puede extraerse la raíz de k-ésimo grado para cualquier número natural k. Hallar el número de diferentes transformaciones normales ψ, tales que $\psi^k = \varphi$.

1627*. Demostrar que si x es un vector propio de la transformación normal φ de un espacio unitario (o euclídeo), perteneciente al valor propio de λ, x será el vector propio de la transformación conjugada φ^*, perteneciente al número $\bar{\lambda}$ conjugado (al mismo, respectivamente).

1628*. Demostrar que los vectores propios de una transformación normal, pertenecientes a dos distintos valores propios, son ortogonales.

1629*. Sea e un vector propio de la transformación normal φ. Demostrar que el subespacio L compuesto por todos los vectores del espacio, ortogonales a e, es invariante con respecto a φ.

1630*. Demostrar que para que la transformación lineal φ del espacio unitario sea normal es necesario y suficiente que cada vector propio de φ sea propio también para φ^*.

1631*. Demostrar que cualquier subespacio L de un espacio unitario R_n, invariante con respecto a la transformación normal φ, posee una base ortonormal que consta de vectores propios de la transformación φ.

1632*. Se dice que la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) R_n posee una *propiedad normal* si el complemento ortogonal L^* para cada subespacio L, invariante a φ, es también invariante con relación a φ. Demostrar la afirmación: para que la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) sea normal es necesario y suficiente que φ posea la propiedad normal.

1633*. Demostrar que para que la transformación lineal φ del espacio unitario (o euclídeo) sea normal es necesario y suficiente que cada subespacio, invariante a φ, sea invariante también con relación a φ^*.